

**DEJAN TRIFUNOVIĆ<sup>1</sup>**

E-mail: dejan.trifunovic@ekof.bg.ac.rs

# UPARIVANJE LEKARA I BOLNICA PRIMENOM GEJL-ŠEJPLIJEVOG ALGORITMA

## MATCHING DOCTORS AND HOSPITALS WITH THE GALE- SHAPELY ALGORITHM

---

**JEL KLASIFIKACIJA: C78.**

---

**APSTRAKT:**

*U ovom radu prikazujemo mogućnost primene algoritma odloženog prihvatanja na uparivanje lekara-stažista i bolnica. Standardna verzija ovog algoritma mora da bude modifikovana da bi obezbedila da stabilno uparivanje postoji na ovim tržištima, imajući u vidu specifičnost uparivanja lekara i bolnica. U algoritmu postoji podsticaj za bolnice da umanjuju kapacitet, da bi bile uparene sa preferiranim skupom lekara, ali se ovaj podsticaj umanjuje sa povećanjem veličine tržišta. Algoritam nije moguće prilagoditi tako da poveća broj lekara koji bi stažirali u malim mestima, ali je taj cilj moguće ostvariti uz uvođenje regionalnih kvota i prilagođavanje algoritma uparivanja.*

**KLJUČNE REČI:****GEJL-ŠEJPLIJEV ALGORITAM, STABILNO UPARIVANJE, MANIPULACIJE KAPACITETIMA, REGIONALNE KVOTE.**

**ABSTRACT:**

*In this paper, we present the review of the application of the deferred acceptance algorithm on matching doctors and hospitals. The standard version of this algorithm must be modified to enable stable matching, bearing in mind the peculiarities of this market. There is an incentive for hospitals to manipulate with their capacities in the algorithm, in order to obtain the preferred set of doctors, but this incentive diminishes with the size of the market. The algorithm can not be adjusted to increase the number of doctors that would do the internship in small towns. Still, this objective can be achieved by introducing regional quotas and by adjusting the algorithm to the presence of quotas.*

**KEYWORDS:**

**GALE-SHAPELY ALGORITHM, STABLE MATCHING, CAPACITY MANIPULATION, REGIONAL QUOTAS.**

# 1. UVOD

Jedna od centralnih tema mikroekonomije je uloga tržišnih cena u optimalnoj alokaciji resursa. Međutim, postoje određena tržišta na kojima imamo ponudu i tražnju i gde nije moguće koristiti cene usled zakonskih ili etičkih ograničenja, ali je ipak potrebno odrediti optimalnu alokaciju resursa<sup>2</sup>. Primer ovakvog tržišta je uparivanje učenika i državnih srednjih škola koje su besplatne. Ovde stranu tražnje čine učenici koji imaju preferencije prema školama, dok stranu ponude čine škole sa određenim brojem raspoloživih mesta koje rangiraju učenike prema prioritetima (na primer, prema mestu stanovanja). U ovoj situaciji nije moguće uskladiti ponudu i tražnju kroz promenu visine školarine, tako da se školarina poveća u školama gde postoji visoka tražnja, a smanji u školama sa niskom tražnjom. Jedini način da se izvrši optimalna alokacija učenika je da se koriste algoritmi uparivanja koji bi doveli do stabilnog uparivanja. Međutim, primena bilo kog algoritma ne obezbeđuje da uparivanje bude stabilno. Loše odabran algoritam uparivanje može da dovede do zagušenosti tržišta ili do toga da učenici nemaju podsticaj da istinito navedu preferencije prema školama. Stoga je Alvin Rot sa saradnicima konstruisao algoritam za uparivanje učenika i škola koji je rezultirao stabilnim uparivanjem. Za ovaj doprinos, ali i za primene uparivanja na drugim tržištima, Alvin Rot je dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju 2012. godine sa Lojdom Šejplijem<sup>3</sup>.

Druga važna primena algoritama uparivanja je u uparivanju lekara koji stažiraju i bolnica o čemu će biti reči u ovom radu. Naime, lekari moraju da provedu određeni vremenski period na stažiranju u bolnicama i za taj rad dobijaju minimalnu nadoknadu. I u ovom slučaju nije moguće koristiti prilagođavanje nivoa plate da bi se uskladila ponuda i tražnja. Alvin Rot je sa svojim saradnicima i na ovom tržištu predložio primenu algoritma koji dovodi do stabilnog uparivanja, a koji ima neke specifičnosti u odnosu na algoritam za uparivanje učenika i škola.

Prethodno opisani slučajevi predstavljaju dvostrano uparivanje, kad obe strane tržišta imaju preferencije jedna prema drugoj. Kod uparivanja lekara i bolnica, radi se u potpunosti o dvostranom uparivanju, dok kod uparivanja učenika i škola prioritete škola uslovno možemo da posmatramo kao preferencije. Takođe, prethodna dva primera predstavljaju uparivanje tipa više prema jedan, jer jedan učenik (lekar) može da bude uparen samo sa jednom školom (bolnicom), dok jedna škola (bolnica) može da bude uparena sa više učenika (lekara). Kod jednostranog uparivanja, samo jedna strana tržišta ima preferencije prema predmetima koji treba da budu dodeljeni.

Takvu situaciju predstavlja dodeljivanje smeštaja u studentskim domovima, gde studenti imaju preferencije prema smeštaju, dok sobe ili stanovi predstavljaju predmete koji njima treba da budu dodeljeni i koji nemaju preferencije prema studentima. U ovu grupu problema spada i dodeljivanje izbornih predmeta na univerzitetima, gde studenti imaju preferencije prema predmetima, ali predmeti nemaju preferencije prema studentima. Ovo uparivanje je tipa više prema više, jer student može da bude uparen sa više izbornih predmeta i izborni predmet može da bude uparen sa više studenata<sup>4</sup>.

2 Videti Trifunović (2019a). Aukcije i uparivanje predstavljaju oblast oblikovanja tržišnog mehanizma (*market design*). O aukcijama videti Trifunović (2012, 2014, 2019c)

3 Detaljnije o uparivanju učenika i škola videti Trifunović (2017a).

4 Za prikaz algoritama dodeljivanja izbornih predmeta na univerzitetima, videti Trifunović (2019b).

Sledeća važna primena algoritama jednostranog uparivanja je u transplantaciji organa, gde samo pacijenti imaju preferencije prema organima. I u ovom slučaju je Alvin Rot sa saradnicima dao značajan doprinos kako da se unapredi proces uparivanja, pošto ovde postoje određena ograničenja. Naime, da bi transplantacija bila uspešna, potrebno je da pacijent i donor budu iste krvne grupe i da imaju isti sastav tkiva. Algoritmi jednostranog uparivanja su omogućili da bude izvršen mnogo veći broj transplantacija, što je značajno smanjilo smrtnost zbog nemogućnosti pronalaženja kompatibilnog donora<sup>5</sup>.

Algoritmi uparivanja su zasnovani na kooperativnoj teoriji igara. Zapravo, algoritam određuje jezgro kooperativne igre kad ne postoji neka koalicija koju čini deo aktera, a koja može da poboljša svoj položaj formiranjem takve parcijalne koalicije u odnosu na koaliciju koju čine svi akteri u uparivanju. Drugim rečima, odredili smo jezgro kooperativne igre ako nema blokirajućih koalicija, o čemu će biti više reči kasnije, i tada je alokacija stabilna. Drugo, algoritmi uparivanja zasnovani su i na oblikovanju ekonomskog mehanizma. Kod ovog pristupa je cilj da se kreira takav mehanizam koji će navesti svakog aktera da istinito iskaže svoje preferencije, a koje predstavljaju njegovu privatnu informaciju. Za algoritam uparivanja koji dovodi do istinitog navođenja preferencija kažemo da je kompatibilno podsticajan. Ova osobina algoritma uparivanja je važna, jer pojednostavljuje strategiju učesnika u uparivanju na jednu dominantnu strategiju, a to je istinito navođenje preferencija. U suprotnom, imamo komplikovanu igru sa nesavršenim informacijama u kojoj učesnici u uparivanju treba da odluče na koji način će navesti svoje preferencije koje ne odgovaraju stvarnim preferencijama.

Ostatak rada je organizovan na sledeći način. U drugom delu je predstavljen način funkcionisanja algoritma odloženog prihvatanja, dok je u trećem delu objašnjeno zbog čega je ovaj algoritam neophodno modifikovati kod uparivanja lekara i bolnica. U četvrtom delu su navedena dva aksioma koja bi trebalo da ispune preferencije lekara i bolnica. U petom delu je prikazana situacija kad nije moguće odrediti stabilno uparivanje zbog prisustva parova lekara, dok je u šestom delu pokazano da bolnice mogu da manipulišu kapacitetom da bi ostvarile bolje uparivanje. U sedmom delu je predstavljeno uparivanje uz prisustvo regionalnih kvota, a u poslednjem delu sledi zaključak.

## 2. ALGORITAM ODLOŽENOG PRIHVATANJA

Da bismo objasnili na koji način funkcioniše algoritam odloženog prihvatanja, potrebno je da prvo uvedemo sledeću notaciju i definicije. Pretpostavimo da imamo  $n$  lekara

$S = [s_1, s_2, \dots, s_n]$  i  $m$  bolnica  $H = [h_1, h_2, \dots, h_m]$ . Obeležimo sa  $\succ_s$  striktnu relaciju preferencija lekara  $s$  prema bolnicama. Sa  $\succ_h$  obeležavamo striktnu relaciju preferencija

bolnice  $h$  prema pojedinačnim lekarima, a sa  $\succ_h^\#$  striktnu relaciju preferencija bolnice  $h$  prema skupu lekara. Ove preferencije uključuju mogućnost da neki akter ne bude

uparen. Na primer, ako je  $s \succ_s h$ , bolnica  $h$  nije prihvatljiva lekaru  $s$  i on preferira da ne dobije mesto za stažiranje u odnosu na stažiranje u bolnici  $h$ . Funkcija uparivanja ima

<sup>5</sup> Algoritmi uparivanja u transplantaciji organa prikazani su u Trifunović (2017b).

oblik  $\mu : S \cup H \rightarrow S \cup H$  sa osobinom da ako je lekar  $s$  uparen sa bolnicom  $h$ , tada je bolnica  $h$  uparena sa lekarima koji predstavljaju podskup skupa  $S$ :

$$\mu(s) = h \Leftrightarrow \mu(h) \in S. \quad (1)$$

Dakle, lekar može da bude uparen samo sa jednom bolnicom, dok bolnica može da bude uparena sa više lekara. Pored toga, ako lekar ili bolnica nisu upareni, imamo da je:

$$\mu(s) \notin H \Rightarrow \mu(s) = s, \quad (2)$$

$$\mu(h) \notin S \Rightarrow \mu(h) = h. \quad (3)$$

Prethodne relacije pokazuju da ako neki akter nije uparen sa akterom iz drugog skupa, uparen je sa samim sobom. Uparivanje blokira lekar  $s$  ako on preferira da ne bude uparen u odnosu na uparivanje sa bolnicom koja mu je dodeljena u uparivanju,  $\mu(s)$ , i slično važi za bolnicu  $h$ . Uparivanje koje nije blokirano od strane pojedinačnog lekara ili bolnice je pojedinačno racionalno. Uparivanje može da blokira par koji se sastoji od lekara  $s$  i bolnice  $h$  ako lekar  $s$  preferira bolnicu  $h$  u odnosu na bolnicu koja mu je dodeljena u uparivanju,  $\mu(s)$ , i ako bolnica  $h$  preferira lekara  $s$  u odnosu na lekara  $s'$  koji joj je dodeljen u uparivanju  $s' \in \mu(h)$ . U ovom slučaju postoji opravdana zavist. Uparivanje je stabilno ako je pojedinačno racionalno i ako ne postoji opravdana zavist, tj. ako uparivanje nije blokirano od strane pojedinca ili nekog para lekar-bolnica.

Algoritam odloženog prihvatanja, koji su prvo razmatrali Gejl i Šejpli (1962), funkcioniše na sledeći način. Pretpostavimo prvo da svaka bolnica može da primi jednog lekara na stažiranje i da se lekari prijavljuju u bolnice. Ovakav algoritam se naziva algoritam odloženog prihvatanja u kome se lekari prijavljuju u bolnice. Svaki lekar se prvo prijavljuje u bolnicu koja je njegov najbolji izbor. Nakon ovoga, svaka bolnica na osnovu svojih preferencija kao svoj trenutni najbolji izbor zadržava lekara koji ima najviši rang na listi preferencija ove bolnice i odbija sve ostale prijavljene lekare. U drugom koraku, svi lekari koji su odbijeni u prvom koraku prijavljuju se u bolnicu koja je njihov drugi najbolji izbor. Sve bolnice ponovo razmatraju sve prijavljene kandidate i biraju lekara koji ima najviši rang na listi njihovih preferencija, što uključuje mogućnost odbijanja lekara sa kojim je bolnica bila privremeno uparena u prvom koraku u korist lekara koga preferira, a koji se prijavio u drugom koraku. Ova procedura se odvija iterativno i u  $k$ -tom koraku lekar koji je odbijen u prethodnom koraku se prijavljuje u bolnicu koja je njegov sledeći najbolji izbor, dok svaka bolnica od svih prijavljenih kandidata bira lekara koga najviše preferira. Algoritam je završen kad nema novih prijavi lekara u nekoj iteraciji i nakon toga sva privremena uparivanja postaju konačna. U drugoj verziji algoritma bolnice upućuju poziv lekarima o kojima oni treba da se izjasne. Ovakav algoritam se naziva algoritam odloženog prihvatanja u kome bolnice upućuju poziv lekarima.

Razmotrićemo prvo algoritam odloženog prihvatanja u kome se lekari prijavljuju u bolnice. Pretpostavimo da imamo 3 lekara ( $s_1, s_2$  i  $s_3$ ) i 3 bolnice sa po jednim mestom za stažiranje ( $h_1, h_2$  i  $h_3$ ) sa preferencijama datim u Tabeli 1.

▶ TABELA 1. PREFERENCIJE

$\gamma_{s_1}$	$\gamma_{s_2}$	$\gamma_{s_3}$	$\gamma_{h_1}$	$\gamma_{h_2}$	$\gamma_{h_3}$
$h_2$	$h_1$	$h_1$	$s_1$	$s_3$	$s_1$
$h_1$	$h_2$	$h_2$	$s_3$	$s_1$	$s_3$
$h_3$	$h_3$	$h_3$	$s_2$	$s_2$	$s_2$

U prvom koraku svaki lekar se prijavljuje u bolnicu koja je njegov najbolji izbor, lekari  $s_2$  i  $s_3$  se prijavljuju u bolnicu  $h_1$ , dok se lekar  $s_1$  prijavljuje u bolnicu  $h_2$ .

▶ TABELA 2. ALGORITAM ODLOŽENOG PRIHVATANJA (1)

$h_1$	$h_2$	$h_3$
$s_2, s_3$	$s_1$	

Bolnica  $h_1$  odbija lekara  $s_2$  jer preferira lekara  $s_3$  i ovaj lekar je trenutno najbolji izbor ove bolnice. U drugom koraku, lekar  $s_2$  koji je bio odbijen, prijavljuje se u bolnicu koja je njegov drugi najbolji izbor,  $h_2$  (Tabela 3).

▶ TABELA 3. ALGORITAM ODLOŽENOG PRIHVATANJA (2)

$h_1$	$h_2$	$h_3$
$s_3$	$s_1, s_2$	

Bolnica  $h_2$  odbija lekara  $s_2$  jer preferira lekara  $s_1$ . U trećem koraku lekar  $s_2$  se prijavljuje u bolnicu koja je treći najbolji izbor ovog lekara, a to je bolnica  $h_3$ . Ova bolnica zadržava lekara  $s_2$  kao njen trenutni najbolji izbor (Tabela 4).

▶ TABELA 4. ALGORITAM ODLOŽENOG PRIHVATANJA (3)

$h_1$	$h_2$	$h_3$
$s_3$	$s_1$	$s_2$

Pošto nema novih prijava, algoritam je završen i privremena uparivanja postaju konačna. Dakle, stabilno uparivanje u algoritmu u kome se lekari prijavljuju u bolnice je dato u Tabeli 4. Na isti način možemo da odredimo stabilno uparivanje u algoritmu u kome bolnice upućuju poziv lekarima, što je predstavljeno u Tabeli 5.

▶ TABELA 5. ALGORITAM ODLOŽENOG PRIHVATANJA (4)

$h_1$	$h_2$	$h_3$
$s_1$	$s_3$	$s_2$

Ako uporedimo prethodna dva uparivanja, vidimo da su lekar  $s_2$  i bolnica  $h_3$  upareni u oba algoritma. U algoritmu u kome se lekari prijavljuju u bolnice (Tabela 4), lekari  $s_1$  i  $s_3$  su dobili mesta za stažiranje u bolnicama koje su na prvom mestu na listi njihovih preferencija, dok su za bolnice  $h_1$  i  $h_2$  koje su uparene sa ovim lekarim, ovi lekari drugi najbolji izbor. U algoritmu u kome bolnice upućuju poziv lekarima (Tabela 5), bolnice  $h_1$  i  $h_2$  su uparene sa lekarima  $s_1$  i  $s_3$ , respektivno, koji su za njih najbolji izbor, dok su za ove lekare ove dve bolnice drugi najbolji izbor. Dakle, u algoritmu u kome se lekari prijavljuju u bolnice (optimalno uparivanje za lekare), lekari se nalaze u boljem položaju nego u algoritmu u kome bolnice upućuju poziv lekarima. S druge strane, u uparivanju u algoritmu u kome bolnice upućuju poziv lekarima (optimalno uparivanje za bolnice), bolnice se nalaze u boljem položaju nego u algoritmu u kome se lekari prijavljuju u bolnice.

Razmotrimo sada slučaj kad bolnice mogu da imaju kapacitet veći od jednog mesta. U sledećem primeru bolnica  $h_1$  ima dva mesta, a bolnica  $h_2$  ima jedno mesto. Preferencije lekara i bolnica su date u Tabeli 6.

► TABELA 6. PREFERENCIJE

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$	$\succ_{s_3}$	$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$
$h_1$	$h_2$	$h_2$	$s_1$	$s_2$
$h_2$	$h_1$	$h_1$	$s_2$	$s_1$
			$s_3$	$s_3$

U prvom koraku, lekar  $s_1$  se prijavljuje u bolnicu  $h_1$ , dok se lekari  $s_2$  i  $s_3$  prijavljuju u bolnicu  $h_2$  (Tabela 7).

► TABELA 7. ALGORITAM ODLOŽENOG PRIHVATANJA (1A)

$h_1$	$h_2$
$s_1$	$s_2, s_3$

Pošto bolnica  $h_2$  ima samo jedno mesto, odbija lekara  $s_3$  koji se u narednom koraku prijavljuje u bolnicu  $h_1$ . Pošto ova bolnica ima dva raspoloživa mesta, ovo je konačno uparivanje (Tabela 8).

► TABELA 8. ALGORITAM ODLOŽENOG PRIHVATANJA (2A)

$h_1$	$h_2$
$s_1, s_3$	$s_2$

U ovom primeru je moguće utvrditi da se i u algoritmu u kome bolnice upućuju poziv lekarima dobija isto stabilno uparivanje, ali kako smo ranije videli, to ne mora uvek da bude slučaj.

### 3. MODIFIKACIJE ALGORITMA ODLOŽENOG PRIHVATANJA ZA UPARIVANJE LEKARA I BOLNICA

Problem sa lošim funkcionisanjem uparivanja lekara i bolnica prvo je postao očigledan u SAD gde su se bolnice nadmetale da privuku što kvalitetnije studente. Takvo nadmetanje dovelo je do paradoksalne situacije da su studenti dobijali ponude za stažiranje od bolnica 2 do 3 godine pre završetka studija. Istovremeno, bolnice su ostavljale sve kraći rok studentima da se izjasne o ponudama ne ostavljajući im mogućnost da sagledaju druge opcije. Tako je rok u kome je studenti trebalo da se izjasne postepeno skraćivan sa 10 dana 1945. godine na 12 sati 1950. godine. Pošto je postalo očigledno da ovo tržište ne funkcioniše dobro, odlučeno je da se uspostavi centralizovani sistem uparivanja lekara i bolnica u kome bi obe strane ovog tržišta dostavljale svoje preferencije centralnom kliring sistemu. Ipak, prvi mehanizam centralnog kliringa nije funkcionisao na odgovarajući način, jer su neki studenti i bolnice i dalje pokušavali uparivanje van centralnog kliringa. Podsticaje za ovakvo ponašanje u algoritmima koji ne dovode do stabilnog uparivanja identifikovali su Sonmez (1999) u teorijskom istraživanju, kao i Keigel i Rot (2000) u eksperimentalnom istraživanju. Stoga je 1952. godine predložen novi mehanizam centralizovanog uparivanja (National Resident Matching Program-NRMP). Ovaj mehanizam je mnogo bolje funkcionisao, i kako će kasnije Rot utvrditi, bio je zasnovan na algoritmu odloženog prihvatanja 10 godina pre nego što su Gejl i Šejpli (1962) u pionirskom radu ispitali svojstva ovog algoritma.

Novi izazov za ovaj centralni klirinški sistem pojavio se 1970-ih godina kada je počeo da se povećava broj devojaka koje su studirale medicinu i sve veći broj parova je želeo da stažira u istom gradu. Par lekara možemo da posmatramo kao savršene komplemente, i kad bi parovi lekara u algoritmu iz 1952. godine saopštili preferencije prema parovima bolnica, moglo bi da se desi da ne postoji stabilno uparivanje, što je dokazao Rot (1984).

Stoga su Rot i Peranson (1999) modifikovali ovaj algoritam uparivanja kako bi omogućili parovima da saopštavaju preferencije prema parovima bolnica, a pojedinačnim lekarima prema pojedinačnim bolnicama. U ovom algoritmu se prvo uparuju pojedinačni lekari i bolnice, a nakon što svi oni budu privremeno upareni, uparuju se parovi lekara sa parovima bolnica. Ako uparivanje nekog para dovede do odbijanja pojedinačnog lekara u bolnici sa kojom je bio privremeno uparen, on se uparuje sa narednom bolnicom na listi svojih preferencija, pri čemu ovo uparivanje može da dovede do odbijanja nekog para koji je prethodno bio uparen sa tom bolnicom. Odbijeni par se onda uparuje sa sledećim parom bolnica na listi svojih preferencija. Ovaj algoritam se završava kad nema novih odbijanja. Kod konstruisanja ovog algoritma pošlo se od ideje da odbijanje pojedinačnog lekara uzrokuje manji broj sukcesivnih koraka u algoritmu nego odbijanje para. Stoga je algoritam konstruisan tako da se prvo uparuju pojedinačni lekari i bolnice, a nakon toga parovi. Ipak, i u ovom algoritmu je moguće da ne postoji stabilno uparivanje, ali se prilikom primene ovog algoritma to nije dešavalo. Ovaj fenomen su objasnili Kodžima, Pathak i Rot (2013) i Če, Kim i Kodžima (2019) koji su razmatrali velika tržišta (kakvo je tržište lekara i bolnica) na kome je udeo parova relativno mali i dokazali da je gotovo uvek moguće odrediti stabilno uparivanje. Logika dokaza je zasnovana na činjenici da na velikim tržištima postoji dovoljan broj bolnica sa nepopunjenim kapacitetom. Stoga se sa povećanjem veličine tržišta povećava verovatnoća da pojedinačni lekar, koga je odbila



neka bolnica zbog toga što je privremeno prihvatila par lekara umesto tog pojedinačnog lekara, prijavi u bolnicu koja nije popunila kapacitet nego u bolnicu sa punim kapacitetom, gde bi uzrokovao da neki par koji je prethodno privremeno uparen sa tom bolnicom bude odbijen. Kodžima, Pathak i Rot (2013) su predložili modifikaciju Rot-Peransonovog (1999) algoritma tako da se pojedinačni lekari koji su odbijeni zbog nekog para, ne uparaju odmah sa narednom bolnicom na listi svojih preferencija, već da se sačeka da prvo svi parovi budu upareni, a zatim se prelazi na uparivanje pojedinačnih lekara koji su odbijeni zbog nekog para lekara.

Pored problema postojanja stabilnog uparivanja, drugi problem koji je privukao pažnju istraživača i kreatora zdravstvene politike je postojanje višestrukog stabilnog uparivanja. Naime, lekari preferiraju stažiranje u većim gradovima i poznatijim bolnicama, dok bolnice u malim mestima nisu uspevale da popune mesta sa dovoljnim brojem stažista. Pitanje koje je postavljeno je da li bi bilo moguće modifikovati algoritam uparivanja tako da bude ostvareno stabilno uparivanje u kome je od svih mogućih stabilnih uparivanja najveći broj lekara uparen sa bolnicama u malim mestima. Međutim, Rot (1986) je dokazao u okviru Teoreme seoske bolnice da ako neka bolnica ne uspe da popuni sva mesta za stažiranje u jednom stabilnom uparivanju, neće uspeti da popuni sva mesta ni u nekom drugom stabilnom uparivanju. Štaviše, bolnica koja ima nepopunjena mesta u jednom stabilnom uparivanju, biće uparena sa istim skupom lekara u bilo kom drugom stabilnom uparivanju. Drugim rečima, nije moguće modifikovati algoritam uparivanja tako da se poveća broj lekara koji stažiraju u bolnicama u malim mestima.

## 4. PRETPOSTAVKE O PREFERENCIJAMA PAROVA LEKARA I BOLNICA

Kod uparivanja lekara i bolnica neophodno je da preferencije ispunjavaju određena svojstva koja definišu Klaus i Klijn (2005). Prva osobina preferencija para lekara je odbojnost prema nezaposlenosti, što znači da je redosled preferencija para sledeći: na prvom mestu je situacija kad oba člana imaju obezbeđeno stažiranje, na drugom mestu je situacija kad samo jedan član ima mesto za stažiranje i na poslednjem mestu je situacija kad nijedan član nema mesto za stažiranje. Druga osobina koju treba da imaju preferencije para lekara i bolnica je rezponzivnost. S aspekta para lekara, preferencije su rezponzivne ukoliko jedan član para dobije poziciju koja ima viši rang na listi preferencija tog člana, par se nalazi u boljem položaju. S aspekta bolnica, rezponzivnost znači da preferencije prema jednom lekaru ne zavise od toga koji lekari već rade u toj bolnici. Dakle, ako bolnica preferira lekara  $s_1$  u odnosu na lekara  $s_2$ , onda preferira skup lekara koji uz iste ostale lekare sadrži lekara  $s_1$  u odnosu na skup lekara koji uz iste ostale lekare sadrži lekara  $s_2$ . Formalno, ako obeležimo sa  $S$  skup lekara koji pored ostalih lekara sadrži i lekara  $s_1$ ,

sa  $\succ_h^\#$  preferencije bolnice  $h$  prema skupu lekara, preferencije bolnice su rezponzivne ukoliko važi:

$$S \succ_h^\# S \cup \{s_2\} \setminus \{s_1\}, \quad (4)$$

ako i samo ako je  $s_1 \succ_h s_2$ . Prethodni izraz nam kaže da bolnica preferira skup lekara koji uključuje lekara  $s_1$  u odnosu na skup lekara u kome je taj lekar zamenjen lekarom  $s_2$ .

Osobinu rezpozivnosti preferencija bolnica ćemo objasniti na osnovu primera datog u Haeringer (2017). Pretpostavimo da imamo jednu bolnicu i četiri lekara i da su preferencije bolnice  $\succ_h: s_1, s_2, s_3, s_4$ . Odavde je jednostavno utvrditi da bolnica preferira skup lekara  $\{s_1, s_2, s_3\}$  u odnosu na skup lekara  $\{s_1, s_2, s_4\}$ . Nešto je složenije uporediti skupove lekara  $\{s_1, s_3\}$  i  $\{s_2, s_4\}$ . Prvo, možemo da utvrdimo da bolnica preferira skup lekara  $\{s_2, s_3\}$  u odnosu na skup lekara  $\{s_2, s_4\}$ . Drugo, možemo da utvrdimo da bolnica preferira skup lekara  $\{s_1, s_3\}$  u odnosu na skup lekara  $\{s_2, s_3\}$ , odakle proizilazi da bolnica preferira skup lekara  $\{s_1, s_3\}$  u odnosu na skup lekara  $\{s_2, s_4\}$ . Pored toga, možemo da uporedimo i skupove lekara različite veličine, kao što su  $\{s_2\}$  i  $\{s_1, s_3\}$  uz pretpostavku da bolnica ima najmanje dva raspoloživa mesta. Prvo, pošto bolnica preferira da ima popunjen kapacitet, bolnica preferira  $\{s_2, s_3\}$  u odnosu na  $\{s_2\}$  i isto tako preferira  $\{s_1, s_3\}$  u odnosu na  $\{s_2, s_3\}$ . Iz ovoga sledi da bolnica preferira  $\{s_1, s_3\}$  u odnosu na  $\{s_2\}$ .

## 5. NEPOSTOJANJE STABILNOG UPARIVANJA

Situaciju kad stabilno uparivanje ne posoji usled prisustva para lekara možemo da ilustrujemo pomoću sledećeg modifikovanog primera iz Kodžima (2015). Pretpostavimo da postoje dve bolnice  $h_1$  i  $h_2$  i da svaka bolnica ima jedno mesto za stažiranje. Prva dva lekara predstavljaju par  $c_1 = (s_1, s_2)$ , koji bi želeo da dobije mesto za stažiranje u bolnicama u istom gradu i ima preferencije prema paru bolnica. Lekar,  $s_3$ , ima preferencije prema pojedinačnim bolnicama. Preferencije bolnica i lekara su predstavljene u Tabeli 9.

► TABELA 9. PREFERENCIJE

$\succ_{s_3}$	$\succ_{c_1}$	$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$
$h_2$	$(h_1, h_2)$	$s_3$	$s_2$
$h_1$		$s_1$	$s_3$

Izvor: Modifikovano na osnovu Kodžima (2015)

Preferencije para nisu u skladu sa aksiomom odbojnosti prema nezaposlenosti, jer za par nije prihvatljiva bilo koja druga alokacija osim one u kojoj  $s_1$  stažira u bolnici  $h_1$  i  $s_2$  stažira u bolnici  $h_2$ . Dakle, par preferira situaciju u kojoj nijedan član para nije dobio mesto u nekoj bolnici u odnosu na situaciju u kojoj je bar jedan član para dobio mesto za stažiranje. Ovakve preferencije mogu da dovedu do toga da ne postoji stabilno uparivanje.

Da bismo dokazali da u ovom primeru ne postoji stabilno uparivanje, korišćemo dokaz koji se sastoji od tri koraka. Prvo ćemo pretpostaviti da je par  $(s_1, s_2)$  dobio mesta za stažiranje u bolnicama  $h_1$  i  $h_2$ , respektivno. Ovde blokirajuću koaliciju predstavljaju  $s_3$  i  $h_1$ , jer

$s_3$  preferira stažiranje u bolnici  $h_1$  u odnosu na situaciju kad nema obezbeđeno mesto za stažiranje, dok bolnica  $h_1$  preferira lekara  $s_3$  u odnosu na lekara  $s_1$ . Drugo, pretpostavimo da par  $(s_1, s_2)$  nije dobio mesta za stažiranje i da je samo  $s_3$  dobio mesto za stažiranje u bolnici  $h_2$ . U ovom slučaju par  $(s_1, s_2)$  i bolnice predstavljaju blokirajuću koaliciju. Par preferira da oba člana dobiju mesto za stažiranje u ovim bolnicama u odnosu na situaciju u kojoj nijedan član para nema obezbeđeno mesto za stažiranje. S druge strane, bolnica  $h_2$  preferira  $s_2$  u odnosu na  $s_3$ , dok bolnica  $h_1$  preferira  $s_1$  u odnosu na situaciju kad nema nijednog stažistu. Treće, pretpostavimo da je  $s_3$  uparen sa  $h_1$  ili da nije obezbedio mesto za stažiranje. U ovoj situaciji  $s_3$  i  $h_2$  predstavljaju blokirajuću koaliciju, jer  $s_3$  preferira bolnicu  $h_2$  u odnosu na bolnicu  $h_1$ , dok  $h_2$  preferira  $s_3$  u odnosu na situaciju kad nema nijednog stažistu.

## 6. MANIPULISANJE KAPACITETIMA BOLNICA

U algoritmu u kome se lekari prijavljuju u bolnice, bolnice imaju podsticaj da manipulišu kapacitetima, što su dokazali Koniši i Unver (2006). Ovaj rezultat ćemo ilustrovati sledećim primerom u kome imamo 3 lekara i 2 bolnice od kojih bolnica  $h_1$  ima jedno mesto, a bolnica  $h_2$  dva mesta. Preferencije lekara i bolnica su predstavljene u Tabeli 10.

► TABELA 10. PREFERENCIJE

$\succ_{s_1}$	$\succ_{s_2}$	$\succ_{s_3}$	$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$
$h_2$	$h_1$	$h_2$	$s_1$	$s_2$
$h_1$	$h_2$	$h_1$	$s_3$	$s_1$
			$s_2$	$s_3$

Izvor: autor

Pretpostavimo da za preferencije bolnice  $h_2$  važi da je  $s_2$  preferirano u odnosu na  $\{s_1, s_3\}$ . Ova pretpostavka nije u suprotnosti sa aksiomom o responzivnosti preferencija, jer imamo da je za bolnicu  $h_2$  skup lekara  $\{s_1, s_2\}$  preferiran u odnosu na lekara  $s_2$  koji je preferiran u odnosu na skup lekara  $\{s_1, s_3\}$ . Ukoliko svaka bolnica istinito navede svoje kapacitete, u algoritmu odloženog prihvatanja u kome se lekari prijavljuju u bolnice, imamo stabilno uparivanje koje se ostvaruje nakon jedne iteracije (Tabela 11).

► TABELA 11. MANIPULISANJE KAPACITETOM (1)

$h_1$	$h_2$
$s_2$	$s_1, s_3$

Ukoliko bolnica  $h_2$  saopšti da ima manji kapacitet od stvarnog i prijavi kapacitet od 1, u algoritmu odloženog prihvatanja u kome se lekari prijavljuju u bolnice, imamo stabilno uparivanje koje se ostvaruje nakon 4 iteracije.

## ▶ TABELA 12. MANIPULISANJE KAPACITETOM (2)

$h_1$	$h_2$
$s_2$	$s_1, s_3$

Pošto je bolnica  $h_2$  navela da ima kapacitet od jednog mesta, ona odbija lekara  $s_3$  (Tabela 12). U narednoj iteraciji ovaj lekar se prijavljuje u bolnicu  $h_1$ , koja usled viška prijavi odbija lekara  $s_2$  (Tabela 13).

## ▶ TABELA 13. MANIPULISANJE KAPACITETOM (3)

$h_1$	$h_2$
$s_2, s_3$	$s_1$

U narednoj iteraciji lekar  $s_2$  se prijavljuje u bolnicu  $h_2$  koja odbija lekara  $s_1$ .

## ▶ TABELA 14. MANIPULISANJE KAPACITETOM (4)

$h_1$	$h_2$
$s_3$	$s_1, s_2$

Lekar  $s_1$  se prijavljuje u bolnicu  $h_1$  koja odbija lekara  $s_3$  koji ostaje neuparen.

## ▶ TABELA 15. MANIPULISANJE KAPACITETOM (5)

$h_1$	$h_2$
$s_1, s_3$	$s_2$

Dakle, konačno uparivanje je dato u Tabeli 16:

## ▶ TABELA 16. MANIPULISANJE KAPACITETOM (6)

$h_1$	$h_2$	$s_3$
$s_1$	$s_2$	$s_3$

Na osnovu ovoga vidimo da je bolnica  $h_2$  manipulišući svojim kapacitetom došla u bolji položaj jer je uparena sa lekarom  $s_2$  koga preferira u odnosu na lekare  $\{s_1, s_3\}$ . Paradoksalan rezultat je da manipulacija kapacitetom od strane bolnice  $h_2$  dovodi i bolnicu  $h_1$  u bolji položaj jer je uparena sa lekarom  $s_1$  koga preferira u odnosu na lekara  $s_2$ . S druge strane, lekari su u lošijem položaju usled manipulacije kapacitetom. Lekar  $s_3$  neće dobiti mesto za stažiranje, dok su druga dva lekara uparena sa bolnicama koje imaju niži rang na listi njihovih preferencija u odnosu na bolnice sa kojima su bili upareni pre manipulacije kapacitetom. Kao i kod postojanja stabilnog uparivanja, podsticaj za manipulisanje kapacitetom se smanjuje sa povećanjem veličine tržišta.

## 7. REGIONALNE KVOTE

Videli smo da prema Teoremi seoske bolnice nije moguće povećati broj prijavljenih kandidata u bolnicama u malim mestima, tako što bismo podesili algoritam da dovede do nekog drugog stabilnog uparivanja. Problem slabog interesovanja za bolnice u malim mestima postoji i u Japanu, gde lekari preferiraju da stažiraju u velikim gradovima kao što su Tokio, Osaka, Kjoto, Kobe, itd. Stoga su u Japanu od 2008. godine uvedene regionalne kvote za maksimalan broj lekara koji može da dobije stažiranje u nekom od 47 regiona (prefektura). Za uparivanje je korišćen modifikovani algoritam odloženog prihvatanja gde je umesto stvarnog kapaciteta bolnica korišćena administrativno određena kvota koja je obično bila niža od stvarnog broja raspoloživih mesta za stažiranje u bolnici. Međutim, ovako modifikovani algoritam odloženog prihvatanja ne dovodi do stabilnog uparivanja, što ćemo ilustrovati na osnovu primera koji koriste Kamada i Kodžima (2015).

Pretpostavimo da u jednoj prefekturi imamo dve bolnice  $h_1$  i  $h_2$  od kojih svaka ima stvarni kapacitet od 10 mesta za stažiranje. Međutim, kvota za ovu prefekturu je ukupno 10 mesta, koja je raspodeljena na dve bolnice, tako da svaka ima kvotu od 5 mesta. Pretpostavimo da imamo 10 lekara koji žele da stažiraju u ovoj prefekturi. Za lekare  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  je jedino prihvatljiva bolnica  $h_1$ , dok je za ostalih sedam lekara jedino prihvatljiva bolnica  $h_2$ . Obe bolnice imaju identične preferencije, tako da je lekar sa nižim indeksom preferiran u odnosu na lekara sa višim indeksom:

$$\succ_{h_i} : s_1, s_2, \dots, s_{10}, \text{ za } i = 1, 2.$$

U prvoj fazi algoritma odloženog prihvatanja u kome su stvarni kapaciteti bolnica zameñeni njihovim kvotama, lekari  $s_1$ ,  $s_2$  i  $s_3$  se prijavljuju u bolnicu  $h_1$  i svi dobijaju mesto za stažiranje, dok se ostalih sedam lekara prijavljuju u bolnicu  $h_2$ . Ova bolnica ima administrativno određenu kvotu od 5, tako da mora da odbije lekare sa najvišim indeksom koji su najmanje preferirani, a to su lekari  $s_9$  i  $s_{10}$ . Pošto lekarima  $s_9$  i  $s_{10}$  bolnica  $h_1$  nije prihvatljiva oni ostaju neupareni, tako da imamo sledeće uparivanje (Tabela 17).

▶ TABELA 17. REGIONALNE KVOTE

$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$
$h_1$	$h_1$	$h_1$	$h_2$	$h_2$	$h_2$	$h_2$	$h_2$	$s_9$	$s_{10}$

Izvor: Kamada i Kodžima (2015)

Očigledno je da ovo uparivanje nije stabilno imajući u vidu da kvota prefekture nije ispunjena, jer lekari  $s_9$  i  $s_{10}$  i bolnica  $h_2$  predstavljaju blokirajuću koaliciju. Stoga, Kamada i Kodžima (2015) predlažu korišćenje fleksibilnog algoritma odloženog prihvatanja u kome bi lekari  $s_9$  i  $s_{10}$  bili stavljeni na listu čekanja. Nakon toga, lekari sa liste čekanja bi mogli da budu upareni sa bolnicom koju preferiraju iako je kvota ove bolnice ispunjena, pošto regionalna kvota nije ispunjena. Ovakav fleksibilni mehanizam odloženog prihvatanja bi doveo do stabilne alokacije i poboljšanja u Paretoovom smislu.

## 8. ZAKLJUČAK

U ovom radu smo videli da je odnos teorijskih istraživanja i prakse dvosmeran. Problem lošeg funkcionisanja jednog specifičnog tržišta motivisao je teorijska istraživanja sa ciljem da se poboljša funkcionisanje tog tržišta. Dalji razvoj tržišta na kome učestvuju lekari-stažisti i bolnice uzrokovao je modifikacije algoritma uparivanja, kad je u pitanju prisustvo parova u algoritmu i uvođenje regionalnih kvota. Na ovom primeru je očigledno da su teorijska istraživanja doprinela postojanju i boljem funkcionisanju ovog tržišta.

Za uparivanje lekara i bolnica u centralnom kliring sistemu, potrebno je postojanje velikog broja lekara i bolnica. U malim zemljama bi mogao da se ispostavi kao problem nepostojanje stabilne alokacije.

Na kraju, kriza izazvana Korona virusom pokazala je da mnogim zemljama, u koje spadaju i one najrazvijenije, nedostaje medicinski kadar. Stoga, vođenje adekvatne kadrovske politike u zdravstvu se nametnulo kao tema od izuzetne važnosti. Da bi bila izvršena optimalna alokacija lekara, potrebno je uvesti sistem rasporedjivanja stažista po bolnicama i plan njihove dalje specijalizacije. Jer kako je pokazala epidemiološka kriza, broj lekara koji je potreban u kriznim situacijama, koje se retko pojavljuju, prevazišao je broj lekara koji su bili na raspolaganju u većini zemalja, uz nekoliko izuzetaka kao što su Nemačka, Austrija, Švajcarska.

## LITERATURA

---

Che, Y. K., Kim, J., & Kojima, F. (2019), "Stable Matching in Large Economies", *Econometrica*, 87(1), 65-110. <https://doi.org/10.3982/ECTA13547>

---

Gale, D. & Shapely, L. (1962), "College Admission and the Stability of Marriage", *American Mathematical Monthly*, 69, 9-15.

---

Haeringer, G. (2017). *Market Design: Auctions and Matching*, MIT Press.

---

Kagel, J. & Roth, A. (2000), "The Dynamics of Reorganization in Matching Markets: A Laboratory Experiment Motivated by a Natural Experiment", *Quarterly Journal of Economics*, 115(1), 201-235. <https://doi.org/10.1162/003355300554719>

---

Kamada, Y. & Kojima, F. (2015), "Efficient Matching under Distributional Constraints: Theory and Applications", *American Economic Review*, 105(1), 67-99. Doi: 10.1257/aer.20101552

---

Klaus, B. & Klijn, F. (2005), "Stable Matchings and Preferences of Couples", *Journal of Economic Theory*, 121, 75-106. <https://doi.org/10.1016/j.jet.2009.06.001>

---

---

Kojima, F. (2015), "Recent Developments in Matching Theory and Their Practical Applications", *Advances in Economics and Econometrics*, 11<sup>th</sup> World Congress of Econometric Society.

---

Kojima, F., Pathak, P. & Roth, A. (2013), "Matching with Couples: Stability and Incentives in Large Markets", *Quarterly Journal of Economics*, 128(4), 1585-1632. <https://doi.org/10.1093/qje/qjt019>

---

Konishi, H. & Ünver, U. (2006), "Games of Capacity Manipulation in Hospital-intern Markets", *Social Choice and Welfare*, 27, 3-24. <https://doi.org/10.1007/s00355-006-0097-z>

---

Roth, A. & Peranson, E. (1999), "The Redesign of the Matching Market for American Physicians: some Engineering Aspects of Economic Design", *American Economic Review*, 89(4), 748-780. Doi: 10.1257/aer.89.4.748

---

Roth, A. (1984), "The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents", *Journal of Political Economy*, 92, 991-1016. <https://doi.org/10.1086/261272>

---

Roth, A. (1986), "On the Allocation of Residents to Rural Hospitals: A General Property of Two-sided Matching Market", *Econometrica*, 54(2), 425-427. Doi: 10.2307/1913160

---

Sönmez, T. (1999), "Can Pre-arranged Matches Be Avoided in Two-Sided Matching Markets", *Journal of Economic Theory*, 86, 148-156. <https://doi.org/10.1006/jeth.1999.2507>

---

Trifunović, D. (2012): 'Eksperimentalna istraživanja prokletstva pobednika na aukcijama dobara zajedničke vrednosti', *Ekonomске ideje i praksa*, 3, 7-20.

---

Trifunović, D. (2014): 'Aukcije sa preprodajom i indikativno licitiranje', *Ekonomске ideje i praksa*, 14, 61-73.

---

Trifunović, D. (2017a), "Uparivanje učenika i škola", *Ekonomski horizonti*, 19(2), 125-140. doi:10.5937/ekonhor1702125T

---

Trifunović, D. (2017b), "Uparivanje donora organa i pacijenata", *Anali Ekonomskog fakulteta u Subotici*, 38, 3-22.

---

Trifunović, D. (2019a), *Uparivanje na tržištima bez cena*, Ekonomski fakultet Beograd, CID, Beograd.

---

Trifunović, D. (2019b), "Pregled metoda za dodeljivanje izbornih predmeta na univerzitetima", *Ekonomске teme*, 57(4), 511-526. DOI 10.2478/ethemes-2019-0029

---

Trifunović, D. (2019c): Hibridne aukcije i aukcije sa premijom, *Ekonomске ideje i praksa*, 33, 7-24.

---

