*Zoran Popović*

DOI:10.2298/EKA0773036P

# ISPITIVANJE PARETOOVE OPTIMALNOSTI U MODELU OPŠTE EKONOMSKE RAVNOTEŽE SA TRŽIŠTEM SREDSTAVA

## PARETO'S OPTIMUM IN MODELS OF GENERAL ECONOMIC EQUILIBRIUM WITH THE ASSET MARKET

**APSTRAKT:** *Model opšte ekonomske ravnoteže sekvencijalne strukture uključuje i tržište sredstava, koja predstavljaju instrumente redistribucije dohotka kroz vremenske trenutke. Takav model treba da dâ, s jedne strane, objašnjenje relativnog odnosa cena roba, a sa druge strane način formiranja cena sredstava kao instrumenata redistribucije dohotka, kao i mogućnost analize dohodovnih transfera između vremenskih trenutaka. U ovom radu je istraživanje prevashodno usmereno na ispitivanje Paretoove optimalnosti definisanog matematičkog modela opšte ekonomske ravnoteže u uslovima potpunog i nepotpunog tržišta sredstava. Postojanje nepotpunog tržišta sredstava uslovljava smanjenu mogućnost dohodovnih transfera kroz vremenske trenutke posmatranog ekonomskog sistema, što ima za posledicu da ravnotežne alokacije nisu Paretoove optimalne alokacije.*

**KLJUČNE REČI:** *Opšta ekonomska ravnoteža; Dinamički modeli; Potpuna i nepotpuna tržišta sredstava; Paretoova optimalnost.*

**ABSTRACT:** *A model of the general economic equilibrium of sequential structures includes the asset market, where assets are instruments of sequential income redistribution. The model should explain relative prices of commodities, on one hand, and establish the asset pricing as an instrument of income redistribution, on the other, enabling the analysis of sequential income transfers. This paper mainly researches Pareto's optimum of a defined mathematical model of the general economic equilibrium in both complete and incomplete asset markets. The existence of the latter partly disables an economic system to transfer income through time sequences properly, which results in equilibrium allocations not reaching Pareto's optimum.*

**KEY WORDS:** *General economic equilibrium; Dynamic models; Complete and incomplete asset markets; Pareto's optimum.*

**Klasifikacija prema JEL:** D50, D52, C60, E25

## 1. Uvod

Teorija opšte ekonomske ravnoteže orijentisana je na ispitivanje svih međuzavisnosti koje u okviru privrede postoje između pojedinih donosilaca ekonomskih odluka, kao i između roba i između tržišta. Osnovni analitički okvir, koji se u okviru teorije opšte ekonomske ravnoteže koristi za donošenje racionalnih ekonomskih zaključaka, zasnovan je na korišćenju metoda mikroekonomske analize. Teorija opšte ekonomske ravnoteže za svoj osnovni cilj ima određivanje uslova za ostvarivanje i ispitivanje karakteristika ravnotežnih vrednosti osnovnih ekonomskih veličina u okviru nekog ekonomskog sistema. Model opšte ekonomske ravnoteže, koji predstavlja matematičko-metodološku osnovu ove teorije, zasnovan je na korišćenju matematičke aparature u cilju egzaktnog utvrđivanja uslova za ispitivanje i izračunavanje ravnotežnih stanja u okviru nekog ekonomskog sistema.

Modeli opšte ekonomske ravnoteže u svom standardnom obliku polaze od pretpostavke da će se svi učesnici u procesu razmene (potrošači i proizvođači) sresti u tačno određenom vremenskom trenutku i na tačno određenoj lokaciji kako bi se izvršila razmena roba, bez mogućnosti postojanja stanja neizvesnosti ekonomskog sistema kao i bez mogućnosti postojanja prostorne dislokacije i vremenske dimenzije u procesu tržišne razmene. Ovako uvedena pretpostavka veoma značajno ograničava i udaljava standardni model opšte ekonomske ravnoteže (Arrow-Debreuov model opšte ekonomske ravnoteže) od realnog stanja funkcionisanja ekonomskog sistema, a samim tim dobijene ravnotežne vrednosti, kao aproksimacije stvarnih ekonomskih veličina, ne mogu predstavljati u potpunosti realna stanja ekonomskog sistema.

Suprotno prethodno navedenoj restriktivnoj pretpostavci o karakteru procesa tržišne razmene, novija istraživanja u oblasti opšte ekonomske ravnoteže teže da u već definisane matematičke relacije standardnog modela opšte ekonomske ravnoteže uključe vremensku dimenziju, kao i određeni stepen neizvesnosti u procesu tržišne razmene, sa osnovnim ciljem egzaktnijeg opisa tržišnih procesa ekonomskog sistema. Modeli opšte ekonomske ravnoteže koji uključuju vremensku dimenziju i određeni stepen neizvesnosti u procesu tržišne razmene zasnovani su na konceptu opšte ravnoteže sekvencijalne strukture ekonomskog sistema. Dakle, sekvencijalni model treba da na realniji način opiše ekonomsku stvarnost, pošto se u ovim modelima ekonomski sistem posmatra kroz vremensku dimenziju i kroz stanja prostora kao moguća stanja ekonomskog sistema.

Model koji će biti definisan u ovom radu predstavlja model sekvencijalne tržišne strukture koja se sastoji od promptnog tržišta[1] roba za svaki vremenski trenutak, i od tržišta sredstava na kojima sredstva kao instrumenti pružaju potrošačima (agentima) mogućnost redistribuiranja dohotka kroz diferencirane vremenske trenutke. Za razliku od jedne savršeno konkurentske ravnoteže određene u početnom vremenskom trenutku koja ostaje kroz sve buduće vremenske trenutke, u modelu koji će biti razvijan u ovom radu posmatraće se niz ravnotežnih stanja ekonomskog sistema. Modeli opšte ekonomske ravnoteže sa tržištem sredstava treba da pruže mogućnost analize dohodovnih transfera između vremenskih trenutaka, kao i način formiranja cene sredstava kao instrumenata redistribucije dohotka. Pošto definišemo odgovarajući formalni model opšte ekonomske ravnoteže koji uključuje tržište sredstava u uslovima nepostojanja arbitraže, dalja analiza će biti usmerena na ispitivanje Paretoove optimalnosti ekonomskog sistema definisanog odgovarajućim matematičkim modelima.

## 2. Metodološka razmatranja modela opšte ekonomske ravnoteže sa tržištem sredstava

U ovom radu razmatramo alternativnu interpretaciju Arrow-Debreuovog modela koja je nešto bliža funkcionisanju ekonomskog sistema, pri čemu moramo ojačati pretpostavke s obzirom na očekivane rezultate. Pretpostavimo da je za svaki vremenski trenutak poznato promptno tržište $L$-roba kako za tekući vremenski trenutak, tako i za sve buduće vremenske trenutke. Pri tome, u vremenskom trenutku $t$ roba se kupuje i prodaje na tržištu, a plaćanje robe će biti izvršeno u iznosu od $t$-moneta kao obračunskih jedinica za kupovine i prodaje u $t$ vremenskom trenutku. Ovakav oblik prodaje i kupovine robe uslovljava da potrošač mora ispuniti $T+1$ budžetsko ograničenje, tj. po jedno budžetsko ograničenje za svaki od vremenskih trenutaka. Potrošač je, ako ne

[1] **Spot tržište**– (engl. s*pot market*) tržište na kome se predmeti trgovine odmah plaćaju i isporučuju. Zove se i promptno tržište. Obuhvata i deo *futures* tržišta kada je dospeće *futures* ugovora u tekućem mesecu. Spot tržište se, po pravilu, odvija u formi vanberzanskog prometa. Izvor : Ekonomski rečnik, Ekonomski fakultet Beograd, Beograd, 2001, str. 640.

raspolaže sredstvima transfera kupovne moći između vremenskih trenutaka, prisiljen na određene izdatke u svakom vremenskom trenutku koji se moraju slagati sa vrednostima inicijalnog bogatstva odgovarajućeg vremenskog trenutka. U daljoj analizi uvodimo osnovne pretpostavke koje će se odnositi na skup potrošnje, vektor inicijalnog bogatstva potrošača i funkciju korisnosti potrošača.

#### Osnovne pretpostavke[2]

(P1) $C = R_{++}^{L(T+1)}$, gde sa $R_{++}^{L(T+1)}$ obeležavamo pozitivni ortrant robnog prostora oblika $R_{++}^{L(T+1)} = \{c = (c(0), c(1), \ldots, c(T)) \in R^{L(T+1)} | c(j) > 0,\ j = 0,1,2,\ldots,T\}$;

(P2) $e \in R_{++}^{L(T+1)}$;

(P3) $u \in C^2(C, R)$, gde je $C^2(C, R)$ skup funkcija sa domenom $C$ koje uzimaju vrednosti iz skupa $R$ i pri tome su dva puta diferencijabilne;

(P4) $Du(c) \in R_{++}^{L(T+1)}$ za svaki $c \in R_{++}^{m}$, pri čemu *Jacobian funkcije* $u$, gde je $Du: C \to R$, definišemo kao vektor funkciju parcijalnih izvoda u tački $c$, tj.

$$Du(c) = (D_1 u(c), D_2 u(c), \ldots, D_n u(c)) = \left( \frac{\partial u(c)}{\partial c_1}, \frac{\partial u(c)}{\partial c_2}, \quad , \frac{\partial u(c)}{\partial c_n} \right) \in R_{++}^{m}.$$

Možemo reći da Jacobian $Du(c)$ predstavlja linearnu formu definisanu u prostoru $R^{L(T+1)}$, odnosno vektori Jacobiana $Du(c)$, ako ih obeležimo kao $grad\ u(c)$, predstavljaju gradijente funkcije korisnosti $u$ koji su ocenjeni u okolini tačke $c$.

2 Potpuniji prikaz implikacija osnovnih pretpostavki dat je u: Balasko, Y. (1988), *Fundations of the Theory of General Equilibrium*, Academic Press.

(P5) za $c \in R_{++}^m$ je $\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} h_j h_k \frac{\partial^2 u(c)}{\partial c_j \partial c_k} < 0$ , za svaki $h \in R^m$, i za $h \neq 0$ tada je $\sum_{j=1}^{m} h_j \frac{\partial u(c)}{\partial c_j} = 0$ , gde $D^2 u(c)$ predstavlja *Hessian funkcije* $u$ u tački $c$, odnosno za simetričnu $nxn$-matricu vrednost na mestu $(i, j)$ iznosi $D_{ij}^2 u(c) = \frac{\partial^2 u(c)}{\partial c_i \partial c_j}$.

Pretpostavke (P1) i (P2) impliciraju da inicijalno bogatstvo potrošača predstavlja moguću potrošnju. Pretpostavke (P3), (P4) i (P5) koje je uveo G. Debreu (1972)[3] pružaju mogućnost dobijanja diferencijabilne funkcije tražnje za robe u standardnom modelu opšte ekonomske ravnoteže. Dakle, u pretpostavci (P3), funkcija $u$ je diferencijabilna funkcija ako i samo ako ima neprekidan prvi i drugi parcijalni izvod. Naime, pretpostavkom (P3) zagovara se da funkcija korisnosti $u$ ima parcijalne izvode prvog i drugog reda, tj. funkcija korisnosti $u : R_+^m \to R$ neprekidna je u prostoru $R_+^m$. Pretpostavka (P4) je pretpostavka stroge monotonosti (za diferencijabilan slučaj). Pretpostavkom (P5) polazi se od stava da je funkcija korisnosti strogo kvazi-konkavna funkcija. U stvari, pretpostavka (P5) polazi od toga da je za svaki pozitivan vektor potrošnje $c$, kvadratna forma drugih izvoda funkcije korisnosti $u$ (što možemo napisati kao $h^n D^2 u(c) h < 0$) negativno je definitna pošto je ograničena sa hiperravni indiferentnosti preko vektora potrošnje $c$ (za $h \in R^m \setminus \{0\}$ hiperravan je $Du(c)h = 0$). Ova familija lokalnih stanja (za sve $c \in R_{++}^m$) implicira globalno svojstvo da je funkcija korisnosti $u$ strogo kvazi-konkavna na prostoru $R_{++}^m$. Osim toga, za svaki $c \in R_{++}^m$ implicira lokalno svojstvo da se gradijent $grad\ u(c)$ ocenjen u okolini tačke $c$ prema indiferentnoj površi preusmerava za bilo koju lokalnu promenu $c$.

Pošto smo uveli osnovne pretpostavke i dali njihova objašnjenja možemo matematički formulisati pojam potrošača koji zadovoljava uvedene pretpostavke.

[3] Debreu G., (1972), «*Smooth Prefernces*» *Econometrica,* 40.

**Definicija 2.1. Potrošača** definišemo kao uređenu trojku $(C,u,e)$, gde je $u : C \to R$ (tj. $u : R_{+}^{m} \to R$ ) funkcija korisnosti potrošača.

Vektor potrošnje je ograničen budžetskim ograničenjem odnosno potrošač mora izabrati takav vektor potrošnje $c = (c(0), c(1), ..., c(t))$ da troškovi potrošnje nisu veći od ukupnog inicijalnog bogatstva potrošača, tj. vektor potrošnje $c = (c(0), c(1), ..., c(t))$ mora zadovoljiti sledeći uslov

$$P(0)c(0) + P(1)c(1) + .... + P(T)c(T) \leq W \, . \tag{2.1}$$

Sada, kada smo izrazom (2.1) dali budžetsko ograničenje, definišemo **budžetski skup** za vektor cena $P = \left(P(0), P(1), \ldots, P(T)\right)$ i dati ukupan prihod potrošača $W > 0$ kao ukupno inicijalno bogatstvo, oblika

$$B(P,W) = \left\{c \in C \;\middle|\; Pc = P(0)c(0) + P(1)c(1) + .... + P(T)c(T) \leq W\right\}, \tag{2.1a}$$

Budžetski skup $B(P,W)$ je neprazan skup, pri čemu ako skup potrošnje u definiciji budžetskog skupa zadovoljava uslov jednakosti, tada to posmatramo kao bužetsku hiperravan. Budžetsko ograničenje dato izrazom (2.1) odnosno izrazom (2.1a), predstavlja za potrošača nivo potrošnje određen nekim od planova potrošnje koji se nalaze u poluprostoru na ili ispod budžetske hiperravni.

Neka su za vremenske trenutke $t \in T_1$ očekivane tekuće cene[4] $p(t)$, a sa $\beta(t)$ označavamo cene izražene u $0$-moneti za jednu jedinicu $t$-monete vremenskog trenutka $t$, odnosno $\beta(t)$ predstavlja **diskontni faktor**. Vektor $r = \left(r(1), r(2), \ldots, r(T)\right)$ posmatran u tekućem vremenskom trenutku predstavlja neto dohodovni vektor, pri tome, vrednost neto dohodovnog

4 **Spot cena**– (engl. s*pot price*) cena robe, hartije od vrednosti ili deviza po kojoj se vrše kupoprodajne transakcije na finansijskom ili robnom tržištu za momentalnu isporuku predmeta trgovine. Na drugoj strani, robe, hartije od vrednosti i devize imaju *futures*, *forward* i opcionu cenu za odloženu isporuku predmeta trgovine u određenom trenutku u budućnosti. Spot cene za isti predmet trgovine na različitim tržištima usklađuju se procesom arbitraže. Sinonimi za spot cenu su *cash* cena i tekuća cena. Izvor : Ekonomski rečnik, Ekonomski fakultet Beograd, Beograd, 2001, s. 640.

vektora $r$ u vremenskom trenutku $t=0$ izraženog u obračunskoj jedinici $0$ - moneta bila bi

$$\beta \cdot r = \beta(1)r(1) + \beta(2)r(2) + \ldots + \beta(T)r(T),$$

pri tome, izbor neto dohodovnog vektora određen je sledećim ograničenjem

$$r(0) + \beta(1)r(1) + \beta(2)r(2) + \ldots + \beta(T)r(T) = 0, \tag{2.2}$$

odnosno, $H = \left\{ r \in R^{T+1} \middle| \beta r = 0 \right\}$, (2.2a)

pri čemu je diskontni faktor, vektor $\beta = (\beta(0), \beta(1), \beta(2), \ldots, \beta(T)) \in R^{T+1}_{++}$ sa $\beta(0) = 1$.

Sada definišemo problem potrošača kada postoji promptno tržište roba za vremenski trenutak $t \in T_0$ i promptno tržište dohotka za vremenski trenutak $t = 0$ (ili kraće potrošačev problem promptnog tržišta) u obliku

$$\begin{aligned}
&\max_{(c,r)} u(c(0), c(1), c(2), \ldots, c(T)) \\
&\qquad c \in C \\
&p(0)(c(0) - e(0)) \le r(0) \\
&p(1)(c(1) - e(1)) \le r(1) \\
&\qquad \ldots\ldots \\
&p(T)(c(T) - e(T)) \le r(T) \\
&r(0) + \beta(1)r(1) + \beta(2)r(2) + \ldots. + \beta(T)r(T) = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

pri čemu su cena robe $p(0)$ i diskontni faktor $\beta = (1, \beta(1), \beta(2), \ldots, \beta(T))$ poznati za tekući vremenski trenutak, a vektor cena robe $p(t)$ za vremenske trenutke $t \in T_1$ predstavlja očekivane cene budućih vremenskih trenutaka.

U modelu koji posmatra promptno tržište dohotka u vremenskom trenutku $t = 0$ potrošaču stoji na raspolaganu mogućnost preraspodele (dohodovnih transfera), kako za vremenski trenutak $t=0$, tako i mogućnost preraspodele dohodovnih transfera za sve buduće vremenske trenutke. Neophodno je da je ravnotežni vektor neto dohotka svakog potrošača izjednačen sa vektorom neto izdataka potrošača. Narednom teoremom dajemo tvrđenje da uređena n-torka $\left(\left(\bar{c}\right)_{i\in N},\left(\bar{r}\right)_{i\in N},p,\beta\right)$ predstavlja promptnu tržišnu ravnotežu ako i samo ako za vektor cena $P(t)=\beta(t)p(t)$ uređeni par $\left(\left(\bar{c}\right)_{i\in N},P\right)$ predstavlja Walrasovo[5] ravnotežno stanje. Naime, pod pretpostavkom da postoji vektor diskontnog faktora $\beta$, tako da je $P(t)=\beta(t)p(t)$, tada u modelu potrošačevog problema datog izrazom (2.3) uređeni par $\left(\left(\bar{c}\right)_{i\in N},P\right)$ predstavlja Walrasovo ravnotežno stanje.

**Teorema 2.2.** (videti u [6]). Za vektor tekućih cena $p\in\left(R^L_{++}\right)^{T+1}$ i vektor diskontnog faktora $\beta=(\beta(0),\beta(1),\beta(2),\ldots,\beta(T))\in R^{T+1}_{++}$ ($\beta(0)=1$) neka su zadati skup $A=\left\{c\in\left(R^L\right)^{T+1}\right\}$, sa vektorom potrošnje $c$, takvim da predstavlja rešenje potrošačevog problema gde su tekuće cene diskontovane na cene početnog vremenskog trenutka, tj. $P(t)=\beta(t)p(t)$, i skup $A_1=\left\{c\in\left(R^L\right)^{T+1}\right\}$, i pri tome postoji vektor neto dohotka $r\in R^{T+1}$, tako da

---

[5] Walrasova ravnoteža za ekonomski sistem $\Xi=\left(C^i,u^i,e^i\right)_{i\in N}$ predstavlja par $\left(\left(\bar{c}^{\,i}\right)_{i\in N},P\right)$, gde $P\in R^{L(T+1)}_{++}$ takav da

(a) za svaki $i\in N$, $\bar{c}^{\,i}$ je rešenje potrošačevog problema kao problema maksimuma sa zadatim budžetskim ograničenjima, tj. $\max_c \; u^i(c)\,, \quad za \quad c\in B^i(P,Pe^i)$ ;

(b) $\left(\bar{c}^{\,i}\right)_{i\in N}$ je ravnotežna raspodela (alokacija) potrošnje.

par $(c, r)$ predstavlja rešenje potrošačevog problema promptnog tržišta datog izrazom (2.3). Tada su elementi skupova $A$ i $A_1$ isti, tj. $A = A_1$.

*Dokaz.* Prema iznetim tvrđenjima prvo treba da dokažemo da je $A_1 \subset A$. Neka vektor $c$ sa vektorom $r \in R^{T+1}$ predstavlja rešenje potrošačevog problema promptnog tržišta datog izrazom (2.3). Zatim, kako je na osnovu stava datog izrazom (2.2), $\sum_{i \in N} \beta(t) r(t) = 0$, i množeći sa $\beta(t)$ vremenskog trenutka $t$ ($t \in T_0$) budžetska ograničenja u izrazu (2.3), dobijamo $\sum_{t \in T_0} \beta(t) p(t)[c(t) - e(t)] \le \sum_{t \in T_0} \beta(t) r(t)$. Kako je budžetsko ograničenje potrošačevog problema promptnog tržišta (2.3), $\sum_{i \in N} \beta(t) r(t) = 0$, sledi da za vektor potrošnje $c$ postoji budžetsko ograničenje dato izrazom (2.1a) i predstavlja rešenje potrošačevog problema sa diskontovanim cenama na početni vremenski trenutak, tj. $P(t) = \beta(t) p(t)$. Ovim smo pokazali da je $A_1 \subset A$.

Sada treba da pokažemo da je $A \subset A_1$. Neka vektor potrošnje $c$ postoji za budžetsko ograničenje dato izrazom (2.1a) i predstavlja rešenje potrošačevog problema sa diskontovanim vrednostima, tj. $P(t) = \beta(t) p(t)$. Definišemo vektor $\hat{r}(t)$ za $t \in T_0$ preko relacije $\beta(t) \hat{r}(t) = \beta(t) p(t)[c(t) - e(t)]$, kako je $\hat{r}(t) = p(t)[c(t) - e(t)]$, za $t \in T_0$, i na osnovu budžetskog ograničenja datog izrazom (2.1a) imamo da je $\sum_{t \in T_0} \beta(t) p(t)[c(t) - e(t)] \le 0$, odnosno $\sum_{t \in T_0} \beta(t) \hat{r}(t) \le 0$. Stavimo da je $\begin{cases} r(0) = \hat{r}(0) - \sum_{t \in T_0} \beta(t) \hat{r}(t), & i \\ r(t) = \hat{r}(t) & za \quad t \in T_1 \end{cases}$, tada je $r(0) \ge \hat{r}(0)$ za $\sum_{t \in T_0} \beta(t) \hat{r}(t) = 0$. Sada na osnovu postupka definisanja vektora $\hat{r}(t)$ i $r(t)$ vidimo da par $(c, r)$ predstavlja rešenje potrošačevog problema promptnog tržišta datog izrazom (2.3) sa vektorom neto dohotka $r = (r(t))_{t \in T_0}$. Ovim smo pokazali da je $A \subset A_1$. Pošto je u prvom delu dokaza pokazano da je $A_1 \subset A$, a u drugom delu dokaza je pokazano da je $A \subset A_1$ sledi da je $A_1 = A$, što je i trebalo da dokažemo.

Dokazom Teoreme 2.2 pokazali smo da Walrasova ravnoteža postoji u ekonomskom sistemu sa tzv. promptnim tržištem i uvedenom pretpostavkom da postoji diskontni faktor preko koga se tekuće cene diskontuju na cene početnog vremenskog trenutka odnosno Walrasova ravnoteža postoji za tržišne uslove gde je cena robe tekućih cena određena na promptnim tržištima, pri čemu postoji mogućnost dohodovnih transfera kako za posmatrani vremenski trenutak, tako postoji mogućnost i dohodovnih transfera za buduće vremenske trenutke.

U našoj daljoj analizi uvodimo pretpostavku da neto dohodovni vektor pripada nekom proizvoljnom skupu $M \in R^{T+1}$ odnosno uvodimo sredstva kao instrumente redistribucije dohotka kroz vremenske trenutke. Dakle, specificiramo nove postavke koje pružaju agentima (potrošačima) mogućnost dohodovnih transfera posmatrano u vremenu. Pri tome, neto dohodovni vektor dalje posmatramo kao vektor dividendi koji proizlazi na osnovu izbora portfolia. Portfolio posmatramo najšire kao kombinaciju različitih oblika aktive (sredstava), to jest pod portfoliom podrazumevamo postupak ulaganja (trgovanja sredstvima) sredstava na tržištu sredstava i na osnovu toga ostvarivanje odgovarajućih dividendi. Izbor portfolia kao oblika ulaganja sredstava u ovom delu našeg rada polazi od pretpostavke da se sredstvima može trgovati na tržištu sredstava samo u početnom vremenskom trenutku $t = 0$. Dakle, u ovom modelu struktura tržišta može biti predstavljena:

- Sistemom promptnog tržišta roba za sve vremenske trenutke $t \in T_0$, i
- Sistemom tržišta sredstava (najčešće finansijskih tržišta) koja pružaju instrumentarijum koji omogućava agentima (potrošačima) redistribuiranje dohotka kroz vremenske trenutke.

U zavisnosti od toga kako se vrši izmirenje dividendi, sredstva delimo na **nominalna sredstva** koja predstavljaju izmirenje dividendi u obračunskim jedinicama posmatrano kroz vreme, ili **realna sredstva** koja predstavljaju izmirenje dividendi u obliku robnog snopa. **Nominalna sredstva** posmatramo kao ugovore kojima su definisani vektori dividendi vrednosno izraženi u $t$-moneti za buduće vremenske trenutke $t \in T_1$, oblika $v = (v(1), v(2), \dots, v(T)) \in R^T$, gde vlasnik jedne jedinice sredstva ima pravo na prinos u iznosu od $v(t)$ $t$-moneta u vremenskom trenutku $t$ pod uslovom da je $v(t) > 0$, i obrnuto vlasnik jedne jedinice sredstva primoran je da isporuči iznos od $|v(t)|$ $t$-moneta u vremenskom trenutku $t$ pod uslovom da je $v(t) < 0$. Dalje, pretpostavimo da skup $S = \{1,2, \dots, J\}$ predstavlja skup **strukture sredstava.** Sada na osnovu definisanog skupa strukture sredstava i određenog vektora dividendi možemo definisati **vrednosnu matricu dividendi** $V$ oblika

| Vreme | Sredstva | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | … | $J$ |
| 1 | $v^1(1)$ | $v^2(1)$ | …. | $v^J(1)$ |
| 2 | $v^1(2)$ | $v^2(2)$ | …. | $v^J(2)$ |
| … | … | … | …. | … |
| $t$ | $v^1(t)$ | $v^2(t)$ | …. | $v^J(t)$ |
| … | … | … | …. | … |
| $T$ | $v^1(T)$ | $v^2(T)$ | …. | $v^J(T)$ |

(2.4)

gde su vektori dividendi predstavljeni u kolonama matrice koje opisuju strukturu sredstava, što znači da svaka kolona matrice predstavlja po jedan vektor dividendi iz date strukture sredstava $S$. Pođimo od toga da je portfolio vektor $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j, \dots, \theta_J) \in R^J$, gde svaka kordinata $\theta_j$ pokazuje iznos sredstva $j$ u portfoliu $\theta$ i pri tome može imati pozitivne ili negativne vrednosti, tako da vlasnik portfolia $\theta$ ima mogućnost naplate ili obavezu isplate $t$-moneta za vremenski trenutak $t \in T_1$. Na osnovu datih uslova vidimo da se vlasnik portfolia $\theta$ u vremenskom trenutku $t$ ($t \in T_1$) na osnovu posedovanja paketa sredstava $j$ može naći u jednom od dva alternativna stanja, i to:

- ako je $\tau = \theta_j v^j(t) > 0$, vlasnik portfolia $\theta$ naplaćuje iznos od $\theta_j v^j(t)$ $t$-moneta u vremenskom trenutku $t$; i
- ako je $\tau = \theta_j v^j(t) < 0$, vlasnik portfolia $\theta$ isplaćuje iznos od $\left|\theta_j v^j(t)\right|$ $t$-moneta u vremenskom trenutku $t$.

Prema tome, na ovaj način određena alternativna stanja pružaju mogućnost vlasniku portfolia $\theta$ da u vremenskom trenutku $t$ «naplaćuje» ukupan iznos koji je prouzrokovan od strane svih sredstava odnosno vlasnik portfolia naplaćuje ukupan iznos od $t$-moneta ako je pozitivan ili isplaćuje ukupan iznos od $t$-moneta ako je negativan. Na ovaj način definisan potrošačev paket portfolia $\theta$ određuje neto dohodovni vektor $r$ za sve buduće vremenske trenutke $t \in T_1$, naime predstavlja linearnu kombinaciju kolona matrice dividendi $V$ za $t \in T_1$. Neto dohodovni vektor $r$ predstavljamo sledećim izrazom

$$r = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \dots \\ r(t) \\ \dots \\ r(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^1(1) \\ v^1(2) \\ \dots \\ v^1(t) \\ \dots \\ v^1(T) \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} v^2(1) \\ v^2(2) \\ \dots \\ v^2(t) \\ \dots \\ v^2(T) \end{bmatrix} \theta_2 + \ \dots + \begin{bmatrix} v^J(1) \\ v^J(2) \\ \dots \\ v^J(t) \\ \dots \\ v^J(T) \end{bmatrix} \theta_J, \text{ tj. } r = V\theta \qquad (2.5)$$

Međutim, ako posmatramo do sada sprovedenu analizu, može se uočiti da nije uključen vremenski trenutak $t = 0$, za koji možemo reći da postoje troškovi sredstava s obzirom na to da sredstva mogu predstavljati obavezu isporuke (plaćanja) $t$-moneta u vremenskom trenutku $t$ za buduće vremenske trenutke, to jest ne možemo očekivati da je cena sredstava nužno pozitivna veličina. Pretpostavimo da vektor $q \in R^J$ predstavlja cenu sredstava izraženih u jedinicama $0$ -moneta, tada ako je cena sredstva $j$ negativna, tj. $q_j < 0$, znači da prodavac sredstva $j$ mora isporučiti prema kupcu iznos od $q_j$ $0$ -moneta za svaku jedinicu sredstva $j$ u vremenskom trenutku $t = 0$. Negativna cena sredstva $j$ za vremenski trenutak $t = 0$ predstavlja troškove portfolia vremenskog trenutka $t = 0$. Sada ako vrednosnu dividendnu matricu $V$ datu izrazom 2.4 proširimo vektorom cena sredstava za vremenski trenutak $t = 0$

| Vreme | Sredstva | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | … | $J$ |
| 0 | $-q_1$ | $-q_2$ | … | $-q_J$ |

tako što vrednosnoj dividendnoj matrici $V$ dodajemo prvu vrstu, dobija se **proširena vrednosna dividendna matrica** $W$ oblika

| Vreme | Sredstva | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | … | $J$ |
| 0 | $-q_1$ | $-q_2$ | …. | $-q_J$ |
| 1 | $v^1(1)$ | $v^2(1)$ | …. | $v^J(1)$ |
| 2 | $v^1(2)$ | $v^2(2)$ | …. | $v^J(2)$ |
| … | … | … | …. | … |
| $t$ | $v^1(t)$ | $v^2(t)$ | …. | $v^J(t)$ |
| … | … | … | …. | … |
| $T$ | $v^1(T)$ | $v^2(T)$ | …. | $v^J(T)$ |

$$W = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}$$

(2.6)

Kao što smo predstavili neto dohodovni vektor $r$ za sve buduće vremenske trenutke na osnovu vrednosne matrice dividendi $V$, sada analogno tome možemo predstaviti neto dohodovni vektor $r$ za sve vremenske trenutke $t \in T_0$ na osnovu proširene matrice dividendi $W$. Potrošačev paket portfolia $\theta$ određuje neto dohodovni vektor $r$ za sve vremenske trenutke $t \in T_0$ kao linearnu kombinaciju kolona proširene matrice dividend $W$ oblika

$$r = \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \\ \ldots \\ r(t) \\ \ldots \\ r(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_1 \\ v^1(1) \\ v^1(2) \\ \ldots \\ v^1(t) \\ \ldots \\ v^1(T) \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} -q_2 \\ v^2(1) \\ v^2(2) \\ \ldots \\ v^2(t) \\ \ldots \\ v^2(T) \end{bmatrix} \theta_2 + \ldots + \begin{bmatrix} -q_J \\ v^J(1) \\ v^J(2) \\ \ldots \\ v^J(t) \\ \ldots \\ v^J(T) \end{bmatrix} \theta_J, \text{ tj. } r = W\theta \quad , \quad (2.7)$$

gde neto dohodovni vektor možemo interpretirati po svakoj koordinati odnosno ako je $t$ koordinata pozitivna, tada potrošač kao vlasnik portfolia (agent) naplaćuje $t$-moneta u vremenskom trenutku $t$, i obrnuto, ako je $t$ koordinata negativna, potrošač isplaćuje $t$-moneta u vremenskom trenutku $t$.

Ovako definisan linearni potprostor koji prelazi preko kolona proširene vrednosne matrice dividendi $W$ predstavlja potprostor dohodovnih transfera, dakle možemo definisati potprostor neto dohodovnog vektora preko proširene vrednosne matrice dividendi na sledeći način:

$$M = \langle W \rangle = \left\{ r \in R^{T+1} \;\middle|\; r = W\theta \quad za\ neki\ \theta \in R^J \right\}, \quad (2.8)$$

gde je $M$ linearni potprostor kolona vektora matrice $W$. Pri ovako definisanom prostoru neto dohodovnog vektora može se zaključiti da potrošač nije ograničen u bilo kojem izboru portfolia, budući da proširena vrednosna matrica dividendi za vremenski trenutak $t = 0$ uključuje troškove sredstava. Pošto smo definisali vrednosnu dividendnu matricu $V$, možemo definisati tržišnu strukturu sredstava na osnovu ranga vrednosne dividendne matrice $V$. Neto dohodovni vektor $r$ za sve buduće vremenske trenutke $t \in T_1$ predstavlja linearnu kombinaciju kolona vrednosne matrice dividendi $V$. Prema tome, za neki portfolio $\theta$, i za neki $t \in T_1$, neto dohodovni vektor $r$ kao potprostor *neto dohodovnih transfera* predstavlja linearni prostor ostvaren preko kolona vektora vrednosne matrice dividendi $V$ dat izrazom 2.5. Naime, ako su vektori

$$v^1 = \begin{bmatrix} v^1(1) \\ \dots \\ v^1(t) \\ \dots \\ v^1(T) \end{bmatrix},\ v^2 = \begin{bmatrix} v^2(1) \\ \dots \\ v^2(t) \\ \dots \\ v^2(T) \end{bmatrix}, \dots,\ v^J = \begin{bmatrix} v^J(1) \\ \dots \\ v^J(t) \\ \dots \\ v^J(T) \end{bmatrix},$$

vrednosne dividendne matrice linearno nezavisni (tekuće cene nisu proporcionalne), tada je rang matrice $V$ jednak broju sredstava odnosno dimenzija potprostora neto dohodovnih transfera $[V]$ je $\dim[V] = J$.

Budući da je rang matrice $V$ po vrstama jednak rangu matrice $V$ po kolonama i da vrednosna dividendna matrica $V$ ima $T$-vrsta, tada je dimenzija matrice jednaka ili manja od broja budućih vremenskih trenutaka odnosno rang vrednosne dividendne matrice $V$ je manji ili jednak broju budućih vremenskih trenutaka, tj. $\dim[V] \le T$, što ukazuje da rang vrednosne dividendne matrice $V$ ne zavisi od broja sredstava. Sada na bazi određenog ranga vrednosne dividendne matrice narednom definicijom određujemo potpunu i nepotpunu tržišnu strukturu sredstava.

**Definicija 2.3.** Posmatramo skup budućih vremenskih trenutaka $T_1 = \{1, 2, \dots, T\}$ i neka je dimenzija vrednosne dividendne matrice, $\dim[V] = T$, tada je to **potpuna tržišna struktura sredstava**. Ako je za skup budućih vremenskih trenutaka $T_1 = \{1, 2, \dots, T\}$ dimenzija vrednosne dividendne matrice, $\dim[V] < T$, tada je to **nepotpuna tržišna struktura sredstava**.

Definicijom 2.3 postavili smo osnove tržišne strukture sredstava. Naime, Definicija 2.3 ukazuje nam na mogućnost realizacije bilo kog neto dohodovnog vektora odnosno ako postoji potpuna tržišna struktura sredstava, tada potrošač može ostvariti bilo koji neto dohodovni vektor za buduće vremenske trenutke, i obrnuto, ako je nepotpuna tržišna struktura sredstava, tada će potrošaču uvek biti nedostupan neki neto dohodovni vektor. Pošto smo uveli sredstva u ekonomski sistem kako bi dali agentu (potrošaču) mogućnost dohodovnih transfera kroz vremenske trenutke kao ostvarene dividende na osnovu izabranog portfolia, mi smo takođe pretpostavili da postoji tržište sredstava u početnom vremenskom trenutku $t = 0$, ali nismo raspravili problem formiranja cene sredstava na osnovu kojih bi se postigla tržišna ravnoteža. Naime, ako postoji mogućnost arbitraže[6] (korišćenje razlike u ceni na tržištima sredstava bez rizika) na tržištima sredstava od strane agenata, tada takav postupak dovodi do nedoslednosti u formiranju cene sredstava. Postojanje arbitraže na tržištu sredstava daje potrošaču (agentu) mogućnost ostvarivanja većeg neto dohotka u jednom vremenskom trenutku a da pri tome nema odricanja (smanjenja) od neto dohotka u nekom drugom vremenskom trenutku. Postojanje arbitraže ne samo da ima uticaj na formiranje neto dohotka i cenu sredstava, već ima uticaj i na formiranje ravnotežnog stanja tržišta roba. Naime, neophodan uslov za postojanje ravnotežnog stanja tržišta sredstava, a posredno i za postojanje ravnotežnog stanja tržišta roba, jeste odsustvo postupka sprovođenja arbitraže. U nastavku rada temeljimo zasnivamo tvrđenja na ispitivanju postojanja ravnotežnog stanja tržišta sredstava koje je tesno povezano sa postupkom arbitraže i postojanjem diskontnih stopa za cene sredstava posmatrano u početnom vremenskom trenutku $t = 0$. U analizi treba pokazati da nepostojanje mogućnosti postupka sprovođenja arbitraže implicira u vremenskom trenutku $t = 0$ postojanje diskontnih faktora takvih da je cena sredstava vremenskog trenutka $t = 0$ jednaka njihovoj diskontovanoj vrednosti

6 **Arbitraža–** «Kupovina neke količine jedne imovine i prodaja neke količine druge da bi se realizovao siguran prinos – poznata je kao **nerizična arbitraža** ili, kraće, **arbitraža.** Dokle god ima ljudi koji traže «sigurne stvari», očekivali bismo da bi tržišta koja dobro funkcionišu trebalo da brzo eliminišu bilo kakvu mogućnost za arbitražu. Stoga, drugi način na koji možemo izraziti naš uslov ravnoteže jeste da kažemo da u ravnoteži *ne bi trebalo da bude mogućnosti za arbitražu.*Tome ćemo pribeći kao **uslovu nepostojanja arbitraže».** Izvor: Hal R. Varijan, *Mikroekonomija*, red. S. Babić i M. Milovanović, Ekonomski fakultet Beograd, 2003, s. 178.

i to kako za potpunu tržišnu strukturu sredstava, tako isto važi i za nepotpunu tržišnu strukturu sredstava.

Pretpostavimo da je struktura sredstava data vrednosnom matricom dividendi $V$ (izraz 2.4) sa skupom sredstava $S = (1, \ldots, J)$, i neka je vektor $q \in R^J$ vektor cene sredstava. Proširena vrednosna dividendna matrica $W$ je data izrazom 2.6, pri čemu je $M$ linearni potprostor neto dohodovnog (dividendnog) vektora kolona vektora matrice $W$, zadat izrazom 2.8. Sada pošto smo prikazali strukturu sredstava i cene sredstava preko proširene vrednosne dividendne matrice, možemo definisati uslove za odsustvo postojanja arbitražnog postupka.

**Definicija 2.4.** Neka par $(V, q)$ predstavlja strukturu sredstava i cene sredstava u vremenskom trenutku $t = 0$, tada par $(V, q)$ predstavlja **nearbitražni proces** ako je presek potprostora $M$ i prostora $R_+^{T+1}$ nula vektor, tj.

$$M \cap R_+^{T+1} = \{0\}, \tag{2.9}$$

odnosno par $(V, q)$ predstavlja nearbitražni proces ako i samo ako za neki portfolio $\theta \in R^J$ je

$$\begin{aligned} &1.\ V\theta > 0 \Rightarrow q \cdot \theta > 0 \\ &2.\ V\theta = 0 \Rightarrow q \cdot \theta = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ovako data Definicija 2.4 ima smisla s obzirom na to da linearni potprostor $M$ predstavlja skup neto dohodovnog vektora koji je raspoloživ za potrošača. Sa druge starne, ako u Definiciji 2.4 nije zadovoljen zadati uslov 2.9, tada postoji neki portfolio $\theta \in R^J$ takav da je $W\theta = r$, i da je za $t \in T_0$ vektor neto dohotka uvek nenegativan, tj. $r(t) \geq 0$, a za neki vremenski trenutak $t$ vektor neto dohotka je uvek pozitivan, tj. $r(t) > 0$, što znači da portfolio $\theta \in R^J$ predstavlja arbitražni portfolio. Ako postoji **arbitražni portfolio** $\theta \in R^J$ takav da je $V\theta > 0$ ali je $q \cdot \theta \leq 0$, tada od strane kupovnog portfolia $\theta$ neko može ostvariti nenegativan bruto prinos u svakom stanju i strogo pozitivan prihod u bar jednom vremenskom trenutku, bez izdataka u vremenskom trenutku $t=0$. Sa druge strane, ako postoji **arbitražni portfolio** $\theta \in R^J$ takav da je $V\theta = 0$ ali je $q \cdot \theta \neq 0$**,** tada od strane prodajnog portfolia $\theta$ ako je $q \cdot \theta > 0$, i od starne kupovnog portfolia $\theta$ ako je $q \cdot \theta < 0$, može se ostvariti ekstra prihod u vremenskom trenutku $t=0$ bez značajnog uticaja na prihod ostalih vremenskih trenutaka. Portfolio $\theta \in R^J$, ukoliko je arbitražni portfolio, predstavljao bi čin stvaranja «prihoda ni iz čega», odnosno arbitražni portfolio često nazivan u literaturi «free lunches» ne može predstavljati ravnotežni portfolio.

Pretpostavimo da postoji vrednosna dividendna matrica $V$ i da postoji vektor cena sredstava $q$ tako da par $(V, q)$ prema Definiciji 2.4 predstavlja nearbitražni proces. Dalje, ako izaberemo bilo koji vektor $\beta \in R_{++}^{T+1}$ koji predstavlja diskontni faktor (pri čemu je za vremenski trenutak $t=0$ $\beta(0)=1$), tada za svako sredstvo $j \in S$ imamo da je cena sredstva $j$ određena izrazom

$$q_j = -\sum_{t \in T_1} \beta(t) v^j(t), \tag{2.11}$$

odnosno, ekvivalentno posmatrano, cena sredstava $j$ mora ispuniti uslov

$$\beta(0) + \sum_{t \in T_1} \beta(t) v^j(t) = 0, \tag{2.11a}$$

da bi isključili mogućnost sprovođenja arbitraže, tj. da bi postojao nearbitražni proces dat Definicijom 2.4. Narednom teoremom predstavljamo prethodno navedena tvrđenja.

**Teorema 2.5.** (Ross, (1976), u [22]). *Egzistencija Diskontnog faktora*[7] (Osnovna teorema cene sredstava). Neka za vremenske trenutke $t \in T_1$ postoji vrednosna

---

7 Temelji Teoreme o egzistenciji Diskontnog faktora nalaze se u radovima S. Fischera[*] i S. Rossa[**].
[*]Fischer S., (1972), «Assets, Contingent Commodities, and the Slutsky Equation»,

dividendna matrica $V$, u vremenskom trenutku $t=0$ postoji vektor cena sredstava $q$ $(q_1, q_2, \dots, q_J)$, i neka je proširena vrednosna dividendna matrica $W$ oblika

$$W = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}.$$

Tada par $(V, q)$ predstavlja nearbitražni portfolio (proces) ako i samo ako za sve vremenske trenutke $t \in T_0$, postoji vektor diskontnog faktora $\beta \in R_{++}^{T+1}$ $(\beta(0)=1)$ takav da je

$\beta W = 0$, tj. $q = \beta \cdot V$.

*Dokaz.* Pretpostavimo da postoji vektor diskontnog faktora $\beta = (\beta(0), \beta(1), \dots, \beta(T)) \in R_{++}^{T+1}$

takav da je $\beta W = 0$. Obeležimo sa $w^j$ $j$-kolonu vektora matrice $W$, tada je $\beta W = 0$, ekvivalentno sa $\beta w^j = 0$ za $j \in S$, što znači da je vektor $\beta$ ortogonalan u odnosu na svaki kolona vektor matrice $W$. Uvodimo sada obrnutu pretpostavku, neka postoji vektor $w$ takav da je $w \in M \cap (R_{+}^{T+1} \setminus \{0\})$, tada je $w > 0$. Budući da $w \in M$, tada postoji portfolio $\theta \in R^J$ takav da je $w = w^1\theta_1 + w^2\theta_2 + \dots + w^J\theta_J$. Pretpostavimo da je vektor $\beta$ pozitivan $(\beta > 0)$ tada dobijamo $\beta w = \beta w^1\theta_1 + \beta w^2\theta_2 + \dots + \beta w^J\theta_J > 0$ što je za svaki $j \in S$ u suprotnosti sa $\beta w^j = 0$, to jest, linearni potprostor $M$ ne seče prostor $(R_{+}^{T+1} \setminus \{0\})$.

Econometrica, 40, 371-386.

**Ross S.A., (1976), «The Arbitrage Theory of Capital Assets Pricing», Journal of Economic Theory, 3, 343-362.

Pretpostavimo sada da linearni potprostor $M$ ne preseca $\left(R_{+}^{T+1} \setminus \{0\}\right)$. Na osnovu Farkasove leme[8] postoji vektor $\beta \in R_{++}^{T+1}$ takav da je za svaki vektor $w \in M$ $\beta w = 0$. S obzirom na to da za svaki $j \in S$, $w^j$ kolona vektori matrice $W$ pripadaju linearnom potprostoru $M$, imamo da je $\beta W = 0$. Kako je vektor $\beta$ pozitivan vektor, možemo izvršiti normalizaciju tako da je $\beta(0) = 1$. Ovim smo dokazali tvrđenje Teoreme o postojanju (egzistenciji) diskontnog faktora.

Ako dalje analiziramo prvi red proširene vrednosne matrice $W$, odnosno u vremenskom trenutku $t = 0$ cene sredstava $q_j$ date izrazom 2.11, vidimo da za svako sredstvo $j \in S$ **cena sredstva $q_j$ predstavljaju diskontovanu vrednost dividendi sredstava budućih vremenskih trenutaka $t \in T_1$.** Naime, prvi red matrice $W$ predstavlja linearnu kombinaciju preostalih $T$ redova odnosno prvi red matrice $W$ predstavlja linearnu kombinaciju redova vrednosne matrice dividendi $V$ . Prema tome, ako par $(V, q)$ predstavlja nearbitražni proces, tada je rang proširene vrednosne dividendne matrice $W$ jednak rangu vrednosne dividendne matrice $V$, tj. $rang\, W = rang\, V$, i kako matrica $V$ ima $T$ -vrsta, sledi da je rang matrice $V$ manji ili jednak od broja vremenskih trenutaka $T$, tj.

---

8 **Farkasova lema** – Neka je data matrica $M_{kxl}$ i vektori $x_{lx1} \in R^l$ i $y_{1xk} \in R_{++}^k$. Tada, jedna od dve mogućnosti je tačna :

(a) postoji vektor $x_{lx1} \in R^l$ tako da je $Mx > 0$;

(b) postoji vektor $y_{1xk} \in R_{++}^k$ tako da je $yM = 0$.

Geometrijski posmatrano, potprostor $\langle M \rangle$ određen je kao linearna kombinacija vektora kolona matrice $M_{kxl}$, takođe potprostor $\langle M \rangle$ seče prostor $R_{+}^k$ u tački nula (0) ili postoji vektor $y_{1xk} \in R_{++}^k$ tako da $y$ pripada ortogonalnom potprostoru $\langle M \rangle^{\perp}$, tj. pošto je $yM = 0$ imamo za implikaciju da je vektor $y$ ortogonalan prema svakom kolona vektoru matrice $M_{kxl}$.

Izvor : Andreasson N., Evgrafov A., Patriksson M., (2004), *An Introduction to Optimization,* University of Technology, G¨oteborg (Gothenburg), Sweden.

$rang\,V \leq T$, pa je tada i rang matrice $W$ manji ili jednak od broja vremenskih trenutaka $T$, tj. $rang\,W \leq T$.

Definicijom 2.3 dali smo tržišnu strukturu sredstava, tako da je u slučaju potpune tržišne strukture sredstava rang matrice $V$ jednak $T$, tj. $rang\,V = T$, što dalje pruža mogućnost, kako je $rang\,W = rang\,V = T$, da možemo tvrditi da u slučaju potpune tržišne strukture sredstava posmatrano u početnom vremenskom trenutku $t = 0$, cene budućeg dohotka sa promptnog tržišta (diskontni faktor) jedinstveno su određene. Ovo tvrđenje dajemo narednom posledicom.

**Posledica 2.6.** Neka par $(V, q)$ predstavlja nearbitražni proces, i ako postoji potpuna tržišna struktura sredstava tako da je $rang\,W = T$, tada :

i. Postoji jedinstven vektor diskontnog faktora $\beta \in R_{++}^{T+1}$ $(\beta(0) = 1)$ takav da je $\beta W = 0$;
ii. Linearni potprostor neto dohotka je $M = \{r \in R^{T+1} | \beta r = 0\}$.

*Dokaz.* (i) Budući da je rang proširene vrednosne dividendne matrice jednak broju vremenskih trenutaka $T$, tada linearni potprostor $M$ ima dimenziju $T$. Na osnovu teoreme o egzistenciji diskontnog faktora (Teorema 2.5) pokazali smo da postoji vektor diskontnog faktora $\beta \in R_{++}^{T+1}$ takav da je $\beta W = 0$ što znači da vektor diskontnog faktora $\beta \in R_{++}^{T+1}$ pripada ortogonalnom potprostoru prostora $M$. Pretpostavimo sada da postoji vektor $\bar{\beta} \in R_{++}^{T+1}$, $\left(\bar{\beta}(0) = 1\right)$ koji pripada ortogonalnom linearnom potprostoru prostora $M$, i s obzirom na to da ortogonalni linearni potprostor prostora $M$ ima dimenziju jedan, sledi da su vektor $\beta$ i vektor $\bar{\beta}$ linearno zavisni vektori, stoga postoje skalari $\alpha$ i $\bar{\alpha}$ (gde je bar jedan različit od nule), tako da je $\alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta} = 0$, i kako je $\beta(0) = \bar{\beta}(0) = 1$ sledi da je $\alpha = -\bar{\alpha}$. Tada je

$\beta = -\dfrac{\bar{\alpha}}{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\beta}$. Ovim smo dokazali da postoji jedinstveni vektor diskontnog faktora $\beta$.

(ii) Na osnovu dokaza pod (i) imamo da je potprostor $M \subset \{r \in R^{T+1} | \beta r = 0\}$. Budući da je rang matrice $W$ jednak $rang\ W = T$, tada je potprostor $M$ dimenzije $T$ što je ujedno i dimenzija homogene hiperravni $\{r \in R^{T+1} | \beta r = 0\}$, pa je stoga $M = \{r \in R^{T+1} | \beta r = 0\}$, što predstavlja potprostor neto dohotka (dividendi).

U prethodno iznetim stavovima tvrdili smo i pokazali da postoji strogo pozitivni vektor diskontnog faktora, pri tome kolekcija svih vektora diskontnog faktora $\beta \in R^{T+1}_{++}$ ortogonalna je svakom kolona vektoru matrice $W$ i predstavlja ortogonalni potprostor prostora $\langle W \rangle$, koji ovde sada možemo označiti sa $\langle W \rangle^{\perp}$. Dakle, svaki vektor $\beta$ potprostora $\langle W \rangle^{\perp}$ je ortogonalan svakom vektoru prostora $\langle W \rangle$, pa iz toga sledi da je

$$\langle W \rangle^{\perp} = \{\beta \in R^{T+1}_{++} | \beta W = 0\} = \{\beta \in R^{T+1}_{++} | \beta r = 0, \ \ \forall r \in \langle W \rangle\}, \tag{2.12}$$

gde je vektor $\beta \in \langle W^{\perp} \rangle$ predstavljen kao vrsta vekor, a vektor dohodovnih transfera $r \in \langle W \rangle$ jeste kolona vektor. Ortogonalni potprostor $\langle W \rangle^{\perp}$ prostora $\langle W \rangle$ u stvari predstavlja prostor vektora sadašnje vrednosti. Naime, normalizovani vektor $\beta = (\beta(0), \beta(1), \ldots, \beta(T))$ gde je $\beta(0) = 1$, u literaturi se naziva vektor sadašnje vrednosti, pri čemu vrednost $\beta(t)$ predstavlja sadašnju vrednost (u vremenskom trenutku $t = 0$) jedne jedinice dohotka (ostvarene dividende) u vremenskom trenutku $t$. Posledicom 2.6 tvrdili smo, a zatim i dokazali postojanje (egzistenciju) jedinstvenog diskontnog vektora $\beta \in R^{T+1}_{++}$ u slučaju potpune tržišne strukture sredstava određene Definicijom 2.3, međutim ostaje otvoreno pitanje egzistencije jedinstvenog diskontnog faktora $\beta \in R_{++}^{T+1}$ za dalju analizu, ako je slučaj nepotpune tržišne strukture (Definicija 2.3), i pri tome sprovodi se nearbitražni portfolio $\theta$ dat Definicijom 2.4.

Narednom teoremom dajemo opis potprostora dohodovnih transfera kada ne postoji arbitražni proces i kada postoji nepotpuna tržišna struktura sredstava.

**Teorema 2.7.** (Magill i Quinzii, (1996) u [19]). Neka par $(V, q)$ predstavlja nearbitražni proces i neka je $W$ proširena vrednosna dividendna matrica. Ako je rang proširene vrednosne dividendne matrice jednak ukupnom broju sredstava $J$, tj. $rang\, W = J$ i $J \leq T$, tada postoji $H = (T+1) - J$ linearno nezavisnih vektora diskontnog faktora $\left(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^H\right) \in R_{++}^{T+1}$, gde je za vremenski trenutak $t = 0$, $\beta^h(0) = 1$, i za $h = 1,2, \ldots, H$ je $\beta^h W = 0$.

*Dokaz.* Na osnovu pretpostavke koju smo uveli u teoremi, dimenzija linearnog potprostora $M = \langle W \rangle$ je $\dim M = J$, tada imamo da je dimenzija ortogonalnog potprostora $M^{\perp} = \langle W \rangle^{\perp}$ prema prostoru $M$ jednaka, $\dim M^{\perp} = H$. Na osnovu tvrđenja Teoreme 2.5 o egzistenciji diskontnog faktora, postoji vektor $\bar{\beta}^1 \in R_{++}^{T+1}$ koji je ortogonalan u odnosu na svaki kolona vektor matrice $W$, odnosno pripada ortogonalnom potprostoru $M^{\perp}$, pa, prema tome, i ostali vektori $\bar{\beta}^2, \ldots, \bar{\beta}^H$ pripadaju ortogonalnom prostoru $M^{\perp}$. Pri tome, pretpostavimo da vektori $\bar{\beta}^1, \bar{\beta}^2, \ldots, \bar{\beta}^H$ formiraju bazu ortogonalnog potprostora $M^{\perp}$, što znači da su vektori $\bar{\beta}^1, \bar{\beta}^2, \ldots, \bar{\beta}^H$ linearno nezavisni. Izaberimo neki $\delta \in ]0,1[$, i za $h = 2, \ldots, H$ formiramo vektore oblika $\hat{\beta}^h = \delta \bar{\beta}^h + (1-\delta)\bar{\beta}^1$. Sada je potrebno pokazati da su vektori $\bar{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \ldots, \hat{\beta}^h, \ldots, \hat{\beta}^H$ linearno nezavisni vektori. Neka postoje brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_H$, gde su neki različiti od nule, tako da je suma proizvoda

$$\alpha_1 \overset{-}{\beta}^{1} + \alpha_2 \overset{\wedge}{\beta}^{2} + \dots + \alpha_h \overset{\wedge}{\beta}^{h} + \dots + \alpha_H \overset{\wedge}{\beta}^{H} = 0 \text{, odnosno,}$$

$$\alpha_1 \overset{-}{\beta}^{1} + \sum_{h=2}^{H} \alpha_h \left[ \delta \overset{-}{\beta}^{h} + (1-\delta) \overset{-}{\beta}^{1} \right] = 0 .$$

Ako sada levu i desnu stranu pomnožimo sa $1/\delta$ i oslobodimo se zagrade pod sumom dobija se $\frac{1}{\delta}\alpha_1 \overset{-}{\beta}^{1} + \frac{1}{\delta}\sum_{h=2}^{H} \alpha_h \delta \overset{-}{\beta}^{h} + \alpha_h \overset{-}{\beta}^{1} - \alpha_h \delta \overset{-}{\beta}^{1} = 0$. Sređivanjem prethodnog izraza dobijamo $\left[ \frac{1}{\delta}\alpha_1 + \sum_{h=2}^{H} \frac{1-\delta}{\delta}\alpha_h \right] \overset{-}{\beta}^{1} + \sum_{h=2}^{H} \alpha_h \overset{-}{\beta}^{h} = 0$. S obzirom na to da smo pošli od pretpostavke da su vektori $\overset{-}{\beta}^{1}, \overset{\wedge}{\beta}^{2}, \dots, \overset{\wedge}{\beta}^{h}, \dots, \overset{\wedge}{\beta}^{H}$ linearno nezavisni, poslednji izraz je jednak nuli samo ako je $\frac{1}{\delta}\alpha_1 + \sum_{h=2}^{H} \frac{1-\delta}{\delta}\alpha_h = \alpha_2 = \dots = \alpha_H = 0$, što ima za implikaciju da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_H = 0$, na osnovu čega proizlazi da su vektori $\overset{-}{\beta}^{1}, \overset{\wedge}{\beta}^{2}, \dots, \overset{\wedge}{\beta}^{h}, \dots, \overset{\wedge}{\beta}^{H}$ linearno nezavisni vektori, što je trebalo dokazati. Sada neka je vektor $\beta_1 = \frac{1}{\overset{-}{\beta}^{1}(0)} \beta^1$, i neka su za $h = 2,3, \dots, H$ ostali vektori oblika $\beta_h = \frac{1}{\overset{\wedge}{\beta}^{h}(0)} \overset{\wedge}{\beta}^{h}$, gde je $\overset{\wedge}{\beta}^{h}(0) = \delta \overset{-}{\beta}^{h}(0) + (1-\delta) \overset{-}{\beta}^{1}(0)$, tada, vektori $(\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^H) \in R_{++}^{T+1}$ jesu linearno nezavisni vektori, pri čemu je za svaki od vektora $(\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^H)$ prva koordinata jednaka jedan, što smo teoremom i tvrdili.

Teoremom 2.7 odredili smo postojanje potprostora dohodovnih transfera kada nema arbitražnog procesa i kada postoji nepotpuna tržišna struktura sredstava. Pokazali smo da ako je rang proširene vrednosne dividendne matrice, $rang\, W = J$, postoji $H$ linearno nezavisnih vektora koji formiraju bazu vektorskog potprostora koja je ortogonalna na potprostor $M$. Na osnovu određenog ortogonalnog vektorskog potprostora $M^{\perp} = \langle W \rangle^{\perp}$, definišemo za nearbitražni proces $(V, q)$ i nepotpunu tržišnu strukturu sredstava, potprostor dohodovnih transfera $M$ oblika

$$M = \langle W \rangle = \left\{ r \in R^{T+1} \middle| \beta^1 r = \beta^2 r = \ldots = \beta^H r = 0 \right\}. \tag{2.13}$$

Potrošačev problem izbora «najboljeg» vektora potrošnje pod pretpostavkom da neto dohodovni vektor pripada podskupu $M \in R^{T+1}$ u našoj daljoj analizi nazivamo **potrošačev problem na promptnom tržištu u potprostoru neto dohodovnih transfera** $M$ i definišemo izrazom oblika

$$\begin{array}{l} \max\limits_{(c,r)} u(c(0), c(1), \ldots, c(T)) \\ \qquad c \in C \\ \qquad r \in M \\ p(0)(c(0) - e(0)) \leq r(0) \\ p(1)(c(1) - e(1)) \leq r(1) \\ \qquad \ldots\ldots. \\ p(T)(c(T) - e(T)) \leq r(T) \\ (r(0), r(1), \ldots, r(T)) \in M \end{array} . \tag{2.14}$$

U ispitivanju varijacija u vektoru neto dohotka, kao poželjnih ili nepoželjnih varijacija, potrebno je primeniti indirektnu funkciju korisnosti odnosno neophodno je da analiziramo da li je dovoljno mala varijacija vektora neto dohotka poželjna za potrošača, što će se utvrditi preko gradijenta indirektne funkcije korisnosti za potrošače. Dakle, da bi izvršili dekompoziciju modela datog izrazom 2.14 neophodno je da definišemo indirektnu funkciju korisnosti. Indirektnu funkciju korisnosti definišemo pomoću funkcije tražnje na promptnom tržištu[9].

---

[9] Funkcija tražnje na promptnom tržištu (**Spot-tržišna funkcija tražnje**) $g$ je funkcija oblika $g : D \to \left(R^{L}_{++}\right)^{T+1}$, čija je vrednost za par $(p, r)$

**Definicija 2.8.** Neka funkcija $v : D \to R$ predstavlja funkciju definisanu oblika $v(p,r) = u(g(p,r))$ koja ispunjava uvedene **osnovne pretpostavke** (P3) – (P5), i takvu funkciju $v(p,r)$ nazivamo **indirektnom funkcijom korisnosti**.

Indirektna funkcija korisnosti $v(p,r)$ nasledila je osnovna svojstva funkcije korisnosti odnosno sledećom teoremom dajemo tvrđenje o diferencijabilnosti funkcije $v$.

**Teorema 2.9.** (videti u [6]). Neka uređena trojka $(C,u,e)$ predstavlja potrošača, i neka je funkcija $v : D \to R$ indirektna funkcija korisnosti potrošača.

(a) Tada je funkcija $v$ diferencijabilna funkcija od $(p,r)$.
(b) Lagrangovi multiplikatori potrošačevog problema na promptnom tržištu za dati vektor neto dohotka $r$, jednaki su parcijalnim izvodima indirektne funkcije korisnosti, tj.

$$\frac{\partial v\left(p, \bar{r}\right)}{\partial r(t)} = \lambda(t).$$

*Dokaz.* (a) Imamo da je $(p,r) \to g(p,r) \to u(g(p,r))$, i kako je Funkcija tražnje na promptnom tržištu $g$ diferencijabilna funkcija, dobijamo da je kompozicija $u \circ g$ diferencijabilnih funkcija takođe diferencijalna funkcija. S obzirom na to da je indirektna funkcija korisnosti $v = u \circ g$ kompozicija dve diferencijalne funkcije, sledi da je funkcija $v$ diferencijabilna funkcija po paru $(p,r)$.

(b) Prema definiciji, funkcija $v(p,r)$ dva puta je diferencijabilna i ispunjava uvedenu osnovnu pretpostavku (P4), i pri tome, za $t \in T_0$ funkcija tražnje na

---

$g(p,r) = (g_0(p,r), g_1(p,r), \ldots , g_T(p,r)\ )$, i predstavlja jedinstveno rešenje potrošačevog problema na promptnom tržištu sa zadatim neto dohodovnim vektorom $r$, i ispunjava uvedene **osnovne pretpostavke** (P3) – (P5) o diferencijabilnosti funkcija. (videti u [6]).

promptnom tržištu $(g_t)_{t\in T_0}$ zadovoljava uslov $p(t)g_t(p,r)=p(t)e(t)+r(t)$, za par $(p,r)\in D$. Ako sada za neki fiksirani vremenski trenutak $t\in T_0$ (npr. $t=0$) izvršimo diferenciranje leve i desne strane izraza $p(t)g_t(p,r)=p(t)e(t)+r(t)$ sa $r(0)$, dobija se

$$p_1(t)\frac{\partial g_{t1}(p,r)}{\partial r(0)}+p_2(t)\frac{\partial g_{t2}(p,r)}{\partial r(0)}+\dots+p_L(t)\frac{\partial g_{tL}(p,r)}{\partial r(0)}=\begin{cases}1 \ ako \ je \ t=0\\ 0 \ ako \ je \ t\neq 0\end{cases} \tag{2.15a}$$

Neka je $(g_t(p,r))_{t\in T_0}=\bar{c}$, i za dati vektor neto dohotka $r$, vektor potrošnje $\bar{c}$ za svaki $t\in T_0$ zadovoljava relaciju

$$\begin{aligned}&\underset{c(t)}{grad}\ u\left(\bar{c}\right)-\lambda(t)p(t)=0 \ \Rightarrow \underset{c(t)}{grad}\ u\left(\bar{c}\right)=\lambda(t)p(t)\\ &p(t)c(t)-e(t)=r(t)\end{aligned} \tag{2.15b}$$

gde $\underset{c(t)}{grad}\ u\left(\bar{c}\right)$ jesu vektori Jacobiana i predstavljaju gradijente funkcije korisnosti $u$, koji su ocenjeni u okolini tačke $\bar{c}$, a $\lambda(t)$ su Lagrangeovi multiplikatori. Budući da je funkcija indirektne korisnosti oblika $v(p,r)=u(g_0(p,r),g_1(p,r),\dots,g_T(p,r))$, tada, diferenciranjem funkcije indirektne korisnosti za vremenski trenutak $t=0$ po $r(0)$ dobija se $\frac{\partial v(p,r)}{\partial r(0)}=\sum_{t\in T_0}\sum_{l\in L}\frac{\partial u\left(\bar{c}\right)}{\partial c_l(t)}\frac{\partial g_{tl}(p,r)}{\partial r(0)}$. Dalje, na osnovu relacije (2.15b) imamo da je $\frac{\partial u\left(\bar{c}\right)}{\partial c_l(t)}=\lambda(t)p_l(t)$, pa je $\frac{\partial v(p,r)}{\partial r(0)}=\sum_{t\in T_0}\sum_{l\in L}\lambda(t)p_l(t)\frac{\partial g_{tl}(p,r)}{\partial r(0)}$, odnosno $\frac{\partial v(p,r)}{\partial r(0)}=\sum_{t\in T_0}\lambda(t)\sum_{l\in L}p_l(t)\frac{\partial g_{tl}(p,r)}{\partial r(0)}$. Sada na osnovu relacije (2.15a) imamo da je za $t=0$, $\sum_{l\in L} p_l(t)\frac{\partial g_{tl}(p,r)}{\partial r(0)}=1$, na osnovu čega dalje sledi da je $\frac{\partial v(p,r)}{\partial r(0)}=\sum_{t\in T_0}\lambda(t)$, odnosno za $t=0$ imamo da je $\frac{\partial v(p,r)}{\partial r(0)}=\lambda(0)$, što je i trebalo dokazati.

Dekompoziciju modela potrošačevog problema na promtnom tržištu u potprostoru neto dohodovnih transfera $M$ (izraz 2.14) dajemo narednom teoremom.

**Teorema 2.10.** (videti u [19]). (*Dekompozicija potrošačevog problema na promptnom tržištu u potprostoru neto dohodovnih transfera* $M$ ). Neka uređena trojka $(C,u,e)$ predstavlja potrošača. Vektor spot cena $p\in\left(R^L_{++}\right)^{T+1}$, i neka je skup $M$ podskup skupa $R^{T+1}$. Tada uređeni par $\left(\bar{c},\bar{r}\right)$ predstavlja rešenje potrošačevog problema *na promptnom tržištu* u potprostoru neto dohodovnih transfera $M$ ako i samo ako

(a) vektor neto dohotka $\bar{r}$ je rešenje potrošačevog problema izbora neto dohodovnog vektora

$$\begin{aligned}&\max_{r} v(p,r(0),r(1),\ldots,r(T))\\&(r(0),r(1),\ldots,r(T))\in M\end{aligned}\qquad(2.16)$$

(b) vektor potrošnje $\bar{c}$ je rešenje potrošačevog problema *na promptnom tržištu* za dati vektor neto dohotka $r$

$$\begin{aligned}
&\max_{(c)} u(c(0), c(1), c(2), \dots, c(T)) \\
&\qquad c \in C \\
&p(0)(c(0) - e(0)) \leq r(0) \\
&p(1)(c(1) - e(1)) \leq r(1) \\
&\qquad \dots\dots \\
&p(T)(c(T) - e(T)) \leq r(T)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

*Dokaz.* Ako posmatramo alternative promptnog tržišta, može se videti da je u funkciji kriterijuma potrošačevog problema na promptnom tržištu u potprostoru neto dohodovnih transfera $M$ datog izrazom (2.14) maksimizacija definisana preko para $(c, r)$, a u funkciji kriterijuma potrošačevog problema na promptnom tržištu za dati vektor neto dohotka $r$ datog izrazom (2.17) maksimizacija je definisana preko vektora potrošnje $c$ za dati vektor neto dohotka $r$. Potrebno je da pokažemo da je vektor neto dohotka $\bar{r}$ rešenje problema promptnog tržišta datog izrazom (2.16). Primenom definicije indirektne funkcije korisnosti (Definicija 2.8) i definicije funkcija tražnje na promptnom tržištu (fusnota 9) imamo da je za $r \in M$ $v\left(p, \bar{r}\right) = u\left(g\left(p, \bar{r}\right)\right) = u\left(\bar{c}\right) \geq u(g(p, r)) = v(p, r)$, na osnovu čega sledi da je vektor neto dohotka $\bar{r}$ rešenje potrošačevog problema izbora neto dohodovnog vektora datog izrazom (2.16). Zatim, potrebno je da pokažemo da je vektor potrošnje $\bar{c}$ rešenje problema promptnog tržišta datog izrazom (2.17) sa datim vektorom neto dohotka $r = \bar{r}$. Neka vektor potrošnje $c$ predstavlja bilo koju tačku koja zadovoljava ograničenja u definisanom problemu izraza (2.17) sa datim vektorom neto dohotka $r = \bar{r}$, sledi da je $u\left(g\left(p, \bar{r}\right)\right) \geq u(c)$, što znači da je vektor potrošnje $\bar{c} = g\left(p, \bar{r}\right)$ rešenje potrošačevog problema na promptnom tržištu za dati vektor neto dohotka $r$ definisanog izrazom (2.17). S obzirom na to da je vektor neto dohotka $\bar{r}$ rešenje potrošačevog problema izbora neto dohodovnog vektora datog izrazom (2.16) imamo da je za $r \in M$, $v\left(p,\bar{r}\right) \geq v(p,r)$, sa druge strane, jedinstveno rešenje potrošačevog problema na promptnom tržištu za dati vektor neto dohotka $r$, tj. $\bar{c} = g\left(p,\bar{r}\right)$ postoji ako je ispunjen uslov dat izrazom 2.15b. Dalje, neka par $(c,r)$ za vektor tekućih cena $p$ zadovoljava ograničenja potrošačevog problema na promptnom tržištu u potprostoru neto dohodovnih transfera $M$ datog izrazom (2.14), imamo da je:

- na osnovu funkcije tražnje na promptnom tržištu $u(g(p,r)) \geq u(c)$, i
- na osnovu funkcije indirektne korisnosti za $r \in M$ je $u\left(g\left(p,\bar{r}\right)\right) = v\left(p,\bar{r}\right) \geq v(p,r) = u(g(p,r))$.

Na osnovu prethodnog sledi da je $u\left(g\left(p,\bar{r}\right)\right) = u\left(\bar{c}\right) \geq u(c)$ i pošto je $\left(g\left(p,\bar{r}\right),\bar{r}\right) = \left(\bar{c},\bar{r}\right)$, kao par zadovoljava ograničenja potrošačevog problema na promptnom tržištu u potprostoru neto dohodovnih transfera $M$ datog izrazom (2.14), tada par $\left(\bar{c},\bar{r}\right)$ predstavlja rešenje potrošačevog problema na promptnom tržištu u potprostoru neto dohodovnih transfera $M$.

Rezultati prethodnih razmatranja odnosili su se na izbor vektora potrošnje i vektora neto dohotka od strane potrošača na promptnim tržištima, gde smo pokazali da se može razdvojiti izbor neto dohodovnog vektora od izbora robnog snopa potrošnje. U našoj daljoj analizi ravnoteže na promptnom tržištu analiziraćemo postojanje ravnoteže na promptnom tržištu za posmatrani ekonomski sistem.

**Definicija 2.11.** ***Ekonomski sistem sa strukturom sredstava*** $\Xi$ je određen uređenom trojkom $\left(C^i, u^i, e^i\right)_{i \in N}$ gde , za $i \in N$, uređena trojka $\left(C^i, u^i, e^i\right)$ je potrošač, i vrednosnom dividendnom matricom određenom izrazom 2. 4, što predstavljamo u obliku

$$\Xi = \left\{\left(C^i, u^i, e^i\right)_{i \in N}, V\right\}. \tag{2.18}$$

Pošto smo definisali ekonomski sistem sa strukturom sredstava (izraz 2.18), u daljoj analizi razmatramo ekonomski sistem $\Xi$ dat definicijom 2.11 gde je skup ostvarivog neto dohodovnog vektora prouzrokovan strukturom sredstava, na osnovu čega dalje treba da odredimo portfolio izbora koji je neophodan potrošaču kako bi obezbedio plan potrošnje. Na osnovu prethodno datih stavova o dekompoziciji modela potrošačevog problema promptnog tržišta (Teoema 2.10), narednom teoremom dajemo uslove koje mora zadovoljiti ekonomski sistem $\Xi$ da bi portfolio izbora obezbedio plan potrošnje.

**Teorema 2.12.** (Magill i Quinzii, (1996), u [19]). Neka je $\Xi = \left\{\left(C^i, u^i, e^i\right)_{i \in N}, V\right\}$ ekonomski sistem sa strukturom sredstava i neka par $\left(\left(\bar{c}^{\,i}\right)_{i \in N}, p\right)$ predstavlja ravnotežu na promptnom tržištu ekonomskog sistema $\Xi$ u potprostoru dohodovnih transfera, pri čemu je potprostor dohodovnih transfera jednak proširenoj vrednosnoj dividendnoj matrici, tj. $M = \begin{bmatrix} -q \\ V(p) \end{bmatrix} = \langle W(p,q) \rangle$, i za neki vektor cena sredstava $q \in R^{T+1}$, i neka za $i \in N$, $t \in T_0$ važi jednakost $\bar{r}^{\,i}(t) = p(t)\left[\bar{c}^{\,i}(t) - e^i(t)\right]$, tada, za potrošača $i \in N$ postoji portfolio izbora[10] $\bar{\theta}^{\,i}$ takav da je :

[10] Polazimo od toga da za portfolio $\bar{\theta}$ postoji nearbitražni proces koji smo u prethodnom delu rada definisali (definicija 2.4).

(a) $\sum_{i\in N} \bar{\theta}^{i} = 0$, (suma portfolio izbora svih potrošača $i \in N$ ekonomskog sistema jednaka je nuli), i za potrošača $i \in N$ je $\bar{r}^{i} = W(p,q)\bar{\theta}^{i}$, tako da portfolio izbora $\bar{\theta}^{i}$ predstavlja rešenje **potrošačevog problema izbora portfolia** oblika

$$\begin{aligned} &\max_{\theta^i} v^i\left(p, r^i(0), r^i(1), \dots, r^i(T)\right) \\ &\qquad r^i = W(p,q)\theta^i \end{aligned} ; \qquad (2.19)$$

(b) za potrošača $i \in N$ sa uslovom $\bar{r}^{i} = W(p,q)\bar{\theta}^{i}$, plan potrošnje $\bar{c}^{i}$ predstavlja rešenje **potrošačevog problema na promptnom tržištu za portfolio izbora** $\bar{\theta}^{i}$ oblika

$$\begin{aligned} &\max_{c^i} u^i\left(c^i(0), c^i(1), \dots, c^i(T)\right) \\ &\qquad c^i \in C^i \qquad\qquad (2.20) \\ &za \ \ t \in T_0 \quad p(t)\left(c^i(t) - e^i(t)\right) \le \bar{r}^{i}(t) \end{aligned}$$

*Dokaz.* Neka je za potrošača $i \in N$, vektor $\bar{r}^{i}$ ravnotežni neto dohodovni vektor potrošačevog problema u potprostoru neto dohodovnih transfera $M$ definisanog izrazom (2.14). Tada, suma ravnotežnih neto dohodovnih vektora svih potrošača jednaka je nuli, tj. $\sum_{i\in N} \bar{r}^{i} = 0$, i za potrošača $i \in N$, ravnotežni neto dohodovni vektor $\bar{r}^{i}$ rešenje je potrošačevog problema izbora neto dohodovnog vektora datog izrazom (2.16), tj.

$$\max_{r^i} \; v^i\left(p, r^i(0), r^i(1), \dots, r^i(T)\right) \qquad\qquad (2.21)$$
$$r^i \in \langle W(p,q) \rangle .$$

Izaberimo potrošača $i$ iz skupa $i \in \{2,3, \dots, I\}$, tada, budući da za neto dohodovni vektor $\bar{r}^i \in \langle W(p,q) \rangle$, postoji portfolio $\bar{\theta}^i$ takav da je $\bar{r}^i = W(p,q)\bar{\theta}^i$, sledi da je:

- neto dohodovni vektor $\bar{r}^i$ rešenje potrošačevog problema izbora neto dohodovnog vektora datog izrazom (2.21), ako i samo ako je
- portfolio $\bar{\theta}^i$ rešenje potrošačevog problema izbora portfolia datog izrazom (2.19).

Na osnovu do sada sprovedenog dokaza za potrošača $i \in \{2,3, \dots, I\}$, ako je portfolio $\bar{\theta}^i$ rešenje potrošačevog problema datog izrazom 2.19., i na osnovu definisanog potrošačevog problema na promptnom tržištu u potprostoru neto dohodovnih transfera $M$ (izraz 2.14) i Teoreme 2.10 o dekompoziciji potrošačevog problema na promptnom tržištu, sledi da za potrošača $i \in N$, plan potrošnje $\bar{c}^i$ predstavlja rešenje potrošačevog problema na promptnom tržištu za portfolio izbora $\bar{\theta}^i$ datog izrazom 2.20, (ovim smo dokazali stav (b)). Dalje, stavimo da je $\bar{\theta}^1 = -\sum_{i=2}^{I} \bar{\theta}^i$, tada imamo da je za potrošača $i = 1$ vektor neto dohotka $\bar{r}^1 = -\sum_{i=2}^{I} \bar{r}^i = W(p,q)\left[-\sum_{i=2}^{I} \bar{\theta}^i\right] = W(p,q)\bar{\theta}^1$, i budući da je za potrošača $i = 1$ vektor neto dohotka $\bar{r}^1$ rešenje potrošačevog problema izbora neto dohodovnog vektora datog izrazom 2.21, tada je i za potrošača $i = 1$, portfolio $\bar{\theta}^1$ rešenje potrošačevog problema izbora portfolia datog izrazom

2.19. Na osnovu do sada izloženog sledi da na ovaj način definisan portfolio $\bar{\theta}^{1}$ za potrošača $i = 1$, implicira da je suma portfolia svih potrošača jednaka nuli, tj. $\sum_{i \in N} \bar{\theta}^{i} = 0$, što smo i tvrdili stavom (a) Teoreme 2.12.

Teoremom 2.12 izvršili smo dekompoziciju potrošačevog problema na realne tokove (potrošačev problem na promptnom tržištu za portfolio izbora $\bar{\theta}^{i}$, izraz 2.20) i tokove sredstava ekonomskog sistema (potrošačev problem izbora portfolia, izraz 2.19). Naime, ravnotežni model na bazi stava Teoreme 2.12 možemo posmatrati kao dekompoziciju potrošačevog problema na dva potrošačeva problema, odnosno na dekompoziciju robnih i dohodovnih alokacija. Pri tome, ravnoteža promptnog tržišta (ravnoteža robnih alokacija) postoji u zavisnosti od mogućnosti dohodovnih transfera koje su generisane proširenom vrednosnom dividendnom matricom, tj. $M = \begin{bmatrix} -q \\ V(p) \end{bmatrix} = \langle W(p,q) \rangle$. Prema tome, naša dalja istraživanja biće usmerena ka istraživanju prostora dohodovnih transfera generisanog strukturom sredstava i portfoliom izbora.

## 3. Paretoova optimalnost modela opšte ekonomske ravnoteže sa tržištem sredstava

Mogućnost izbora neto dohodovnog vektora, to jest ograničenja koja postoje kod izbora neto dohodovnog vektora, predstavlja centralno pitanje teorije opšte ekonomske ravnoteže sa nepotpunim tržištima sredstava. U našem daljem radu posebnu pažnju posvetićemo analizi ograničenih mogućnosti tržišta da u vremenskom trenutku $t = 0$ omoguće izravnanje potrošačevih relativnih procena dohotka za različite vremenske trenutke. Naime, pošto je skup raspoloživog vektora neto dohotka linearni potprostor, tada u ravnotežnom stanju relativne procene dohotka od strane potrošača, pripadaju potprostoru koji je ortogonalan prema prostoru raspoloživih dohodovnih transfera. Neophodno je ustanoviti u daljoj analizi koja to ograničenja u transferu neto dohotka mogu dati povoda postojanju ravnotežnih alokacija koje nisu Paretoove optimalne alokacije.

Na osnovu definicije indirektne funkcije korisnosti $v$ (Definicija 2.8) imamo za par $(p,r)\in D$, da je $v(p,r(0),r(1),\ldots,r(T))=u(g_0(p,r),g_1(p,r),\ldots,g_T(p,r))$, gde je funkcija tražnje na promptnom tržištu $(g_t(p,r))_{t\in T_0}$ rešenje potrošačevog problema na promptnom tržištu za dati vektor neto dohotka $r$ (izraz 2.17), tj.

$$\begin{aligned}&\max_c u(c(0),c(1),\ldots,c(T))\\ &\qquad\qquad c\in C\\ &p(0)(c(0)-e(0))\le r(0)\\ &p(1)(c(1)-e(1))\le r(1)\\ &\qquad\ldots\ldots..\\ &p(T)(c(T)-e(T))\le r(T)\end{aligned},$$

tada su gradijenti indirektne funkcije korisnosti $v$ po vektoru neto dohotka $r$ oblika

$$\operatorname*{grad}_r v(p,r)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial v(p,r)}{\partial r(0)}\\ \dfrac{\partial v(p,r)}{\partial r(1)}\\ \ldots\ldots\\ \dfrac{\partial v(p,r)}{\partial r(T)}\end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

što predstavlja **vektor granične (marginalne) korisnosti dohotka**.

Jasno se vidi da gradijent indirektne funkcije korisnosti daje samo relativnu procenu neto dohotka sa promptnog tržišta u različitim vremenskim trenucima, pri tome gradijent indirektne funkcije korisnosti kojim se ocenjuje ravnotežni vektor neto dohotka pripada ortogonalnom potprostoru prostora $M$, tj. $\operatorname*{grad}_r v\left(p,\bar{r}\right)\in M^{\perp}$, što tvrdimo narednom teoremom.

**Teorema 3.1.** (Dierker, (1974), u [11]). Neka je $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}, V$ ekonomski sistem i neka uređeni parovi $\left(\left(\overset{-}{c}^{i}\right)_{i\in N}, p\right)$, predstavljaju ravnotežu na promptnom tržištu ekonomskog sistema $\Xi$ u potprostoru neto dohodovnih transfera $M$, sa jednakosti

$$\overset{-}{r}^{i}(t) = p(t)\left(c^i(t) - e^i(t)\right), \text{ za svaki } i \in N \text{ i za svaki } t \in T_0 .$$

Tada, za svakog potrošača $i$ gradijent indirektne funkcije korisnosti potrošača pripada ortogonalnom potprostoru prostora $M$, tj. za svaki $i \in N$, $\underset{r}{grad}\; v^i\left(p, \overset{-}{r}^{i}\right) \in M^{\perp}$.

*Dokaz.* Pretpostavimo da je linearni potprostor $M$ dimenzije $J$, gde je $0 \leq J \leq T$, i neka je $Q$ matrica dimenzija $(T+1)xJ$ čije kolona vektori formiraju bazu za $M$. Dalje, neka je $\overset{-}{r}$ ravnotežni vektor neto dohotka izabran od strane potrošača i predstavlja rešenje potrošačevog problema izbora neto dohodovnog vektora oblika

$$\begin{array}{c} \max\limits_{r} v(p,r) \\ r \in M \end{array} .$$

Pretpostavimo da je ravnotežni vektor neto dohotka $\overset{-}{r} = Q\overset{-}{\theta}$, gde $\theta$ predstavlja rešenje problema

$$\begin{array}{c} \max\limits_{\theta} v(p,r) \\ r = Q\theta \end{array} .$$

Ako sada zamenimo $Q\theta$ u potrošačev problem izbora neto dohodovnog vektora $v(p,r)$, dobijamo od samog početka da je svaki od parcijalnih izvoda iz

$v(p,r)$ po $\theta_1, \ldots, \theta_J$, gde je $\bar{r} = Q\bar{\theta}$, jednak nuli. Parcijalni izvod, recimo u odnosu na $\theta_1$ je

$$\frac{\partial v\left(p, Q\bar{\theta}\right)}{\partial r_0} Q_{01} + \frac{\partial v\left(p, Q\bar{\theta}\right)}{\partial r_1} Q_{11} + \ldots + \frac{\partial v\left(p, Q\bar{\theta}\right)}{\partial r_T} Q_{T1}.$$

S obzirom na to da ovo predstavlja samo skalarni proizvod gradijenta $\underset{r}{grad}\, v(p,r)$ procenjenog u $\bar{r} = Q\bar{\theta}$, sledi da je gradijent $\underset{r}{grad}\, v\left(p, Q\bar{\theta}\right)$ ortogonalan u odnosu na prvi vektor kolona matrice $Q$, što dalje implicira da su i preostali parcijalni izvodi po $\theta_2, \ldots, \theta_J$, kao gradijenti $\underset{r}{grad}\, v\left(p, Q\bar{\theta}\right)$, ortogonalni prema odgovarajućem vektoru kolona matrice $Q$. Zato se na osnovu ovoga može tvrditi da je gradijent, $\underset{r}{grad}\, v\left(p, \bar{r}\right)$, ortogonalan prema svakom vektoru u potprostoru $M$, što implicira da gradijent, $\underset{r}{grad}\, v\left(p, \bar{r}\right)$, pripada ortogonalnom potprostoru prostora $M$, tj. $\underset{r}{grad}\, v\left(p, \bar{r}\right) \in M^{\perp}$.

Dimenzija potprostora neto dohodovnih transfera $M$ je $\dim M \leq T$, pri tome, ako su mogućnosti dohodovnih transfera maksimalne, tada dimenzija prostora $M$ je $\dim M = T$, a dimenzija ortogonalnog prostora $M^{\perp}$ je $\dim M^{\perp} = 1$, tako da vektor marginalne korisnosti dohotka pripada potprostoru $M^{\perp}$, što znači da je proporcionalan (gradijenti indirektne funkcije korisnosti potrošača su proporcionalni) i da su od strane potrošača subjektivne procene dohotka sa promptnog tržišta izjednačene sa ravnotežnim vektorom neto dohotka. Međutim, ako je $\dim M < T$ tada jedino što se može zaključiti jeste da relativne procene neto dohotka sa promptnog tržišta pripadaju ortogonalnom potprostoru prostora $M$. Kako smo do sada pokazali u ravnoteži promptnog tržišta ne postoje ograničenja u razmeni robnih snopova, međutim moguća su ograničenja u ravnoteži promptnog tržišta dohodovnih transfera kroz vremenske trenutke. Narednom teoremom treba da postavimo koja ograničenja dohodovnih transfera prouzrokuju da alokacija ravnoteže na promptnom tržištu nije Paretoova optimalna alokacija, odnosno kada je alokacija promptnog tržišta dohodovnih transfera i Paretoova optimalna alokacija.

**Teorema 3.2.** (Dierker, (1974), u [11], Mas-Colell, (1985) u [18]). (*Alokacija dohodovnih transfera i Paretoova optimalna alokacija*)

Neka je $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}, V$ ekonomski sistem i neka uređeni parovi $\left(\left(\overset{-}{c}^{i}\right)_{i\in N}, p\right)$, predstavljaju ravnotežu promptnog tržišta ekonomskog sistema $\Xi$ u potprostoru neto dohodovnih transfera $M$, sa jednakosti $\overset{-}{r}^{i}(t) = p(t)\left(c^i(t) - e^i(t)\right)$, za svaki $i \in N$ i za svaki $t \in T_0$, gde je neto dohodovni vektor ravnotežan za svaki $i \in N$ i za svaki $t \in T_0$. Ravnotežna alokacija potrošnje $\left(\overset{-}{c}^{i}\right)_{i\in N}$ je Paretoova optimalna alokacija ako i samo ako postoji vektor $\beta \in R^{T+1}_{++}$ i za svaki $i \in N$ postoji $\alpha^i \in R$, takvi da je za svaki $i \in N$, $\underset{i}{grad}\; v^i\left(p, \overset{-}{r}^{i}\right) = \alpha^i \beta$.

*Dokaz.* Na osnovu tvrđenja prve i druge osnovne teoreme blagostanja[11] alokacija potrošnje $\left(\overset{-}{c}^{i}\right)_{i\in N}$ je Paretoova optimalna alokacija ako i samo ako je svaki gradijent funkcije korisnosti ocenjen u tački $\left(\overset{-}{c}^{i}\right)_{i\in N}$ proporcionalan vektoru cena $P \in R^m_{++}$, odnosno ako za svaki $i \in N$, postoje brojevi $\alpha^i \in R$, tako da je

[11] Arrow K. i Debreu G., (1954), „*Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*“, Econometrica, 22, 265-292.

$$grad\ u^i\left(\bar{c}^i\right) = \alpha^i P\,. \tag{3.2}$$

Dalje, posmatramo nekog potrošača $i \in N$, i neka je vektor potrošnje $\bar{c}^i(t)$, rešenje potrošačevog problema na promptnom tržištu za dato $r^i = \bar{r}^i$, i neka je $t \in T_0$ zadovoljen uslov

$$\underset{c(t)}{grad}\, u^i\left(\bar{c}\right) - \lambda^i(t)p(t) = 0\,. \tag{3.3}$$

Na osnovu dokaza Teoreme 2.9 imamo da je za $t \in T_0$

$$\frac{\partial v^i\left(p, \bar{r}^i\right)}{\partial r(t)} = \lambda^i(t), \tag{3.4}$$

odnosno Lagrangeovi multiplikatori potrošačevog problema na promptnom tržištu za dati vektor neto dohotka $r$, jednaki su parcijalnim izvodima funkcije indirektne korisnosti. Sada na osnovu prethodna dva izraza (3.3) i (3.4) imamo da je gradijent funkcije korisnosti jednak

$$\underset{c(t)}{grad}\ u^i\left(\bar{c}^i\right) = \frac{\partial v^i\left(p, \bar{r}^i\right)}{\partial r(t)} p(t), \tag{3.5}$$

i kako je vektor cena $P$ jednak proizvodu vektora diskontnog faktora $\beta$ i vektora tekućih cena $p(t)$, tj. $P = \beta(t)p(t)$, primenom relacije (3.2) imamo da je $\alpha^i \beta(t) p(t) = \dfrac{\partial v^i\left(p, \overset{-i}{r}\right)}{\partial r(t)} p(t)$, tj. za $i \in N$, $grad\ v^i\left(p, \overset{-i}{r}\right) = \alpha^i \beta(t)$, što je trebalo dokazati. Na osnovu dokaza Teoreme 3.2 sada možemo dati posledice koje su nastale iz tvrđenja teoreme.

**Posledica 3.3.** Alokacija dohodovnih transfera je Paretoova optimalna alokacija ako i samo ako su gradijenti funkcija indirektne korisnosti proporcionalni.

**Posledica 3.4.** Posmatramo potrošača $i$ i potrošača $j$ gde $i, j \in N$, tada, gradijent funkcije korisnosti, $\underset{c(t)}{grad}\, u^i\left(\overset{-i}{c}\right)$, potrošača $i$, proporcionalan je gradijentu funkcije korisnosti, $\underset{c(t)}{grad}\, u^j\left(\overset{-j}{c}\right)$, potrošača $j$, ako i samo ako je gradijent indirektne funkcije korisnosti, $grad\ v^i\left(p, \overset{-i}{r}\right)$, potrošača $i$, proporcionalan, gradijentu indirektne funkcije korisnosti, $grad\ v^j\left(p, \overset{-j}{r}\right)$, potrošača $j$.

Definisali smo da je potpuna tržišna struktura ekonomskog sistema, ako je dimenzija proširene vrednosne matrice $W = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}$ jednaka broju vremenskih trenutaka $T$ posmatranja ekonomskog sistema, odnosno ako je $\dim\langle W \rangle = T$, $\dim\langle W \rangle^{\perp} = 1$. Pri tome, nepotpunu tržišnu strukturu ekonomskog sistema posmatramo pod uslovom da je dimenzija proširene vrednosne matrice $W = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}$ manja od broja vremenskih trenutaka $T$, odnosno dimenzija proširene vrednosne matrice $W$ jednaka je broju sredstava koja su manja od broja vremenskih trenutaka posmatranja ekonomskog sistema, tj. $\dim\langle W\rangle = J < T, \quad \dim\langle W\rangle^{\perp} = T - J + 1 > 1$.

Dimenzija proširene vrednosne matrice $W = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}$, to jest broj linearno nezavisnih vektora (kolona matrice) opredeljuje prostor dohodovnih transfera. Dakle, na osnovu toga funkcija korisnosti potrošača (kao i izvedena agregatna funkcija viška tražnje) ograničena je da pripada nekom od mogućih prostora proširene vrednosne matrice $W$.

Na osnovu do sada izloženog, polazimo od definisanog potrošačevog problema, kao problema maksimuma oblika

$$\max_{c^i,\theta^i \in R_+^{T+1} x R^J} \left\{ u^i\left(c^i\right) \middle| \begin{array}{l} c^i(0) - e^i(0) = -\bar{q}\,\theta^i \\ c^i(t) - e^i(t) = V\,\theta^i, \quad t = 1,2,\ \ldots.,T \end{array} \right\} \tag{3.6}$$

i neka vektor $\lambda^i = \left(\lambda_0^i, \lambda_1^i,\ \ldots\ , \lambda_T^i\right)$ predstavlja vektor Lagrangeovih multiplikatora pridruženih $(T+1)$ budžetskom ograničenju. Lagrangeova funkcija definisanog potrošačevog problema maksimuma je oblika

$$L^i\left(c^i, \theta^i, \lambda^i\right) = u^i\left(c^i\right) - \lambda_0^i\left(c^i(0) - e^i(0) + q\theta^i\right) - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^i\left(c^i(t) - e^i(t) - V\,\theta^i\right), \tag{3.7}$$

pri tome, neophodan i dovoljan uslov da par $\left(\bar{c}^i, \bar{\theta}^i\right)$ predstavlja optimalno rešenje potrošačevog problema datog izrazom (3.6), jeste uslov da postoji vektor Lagrangeovih multiplikatora $\bar{\lambda}^i \in R_{++}^{T+1}$ tako da je

$$grad\, u^i\left(c^i\right) = \bar{\lambda}^i \tag{3.8}$$

$$-\bar{\lambda}_0^i \bar{q} + \sum_{t=1}^{T} \bar{\lambda}_t^i V_t = 0 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} &\bar{c}^i(0) - e^i(0) = -\bar{q}\bar{\theta}^i \\ &\bar{c}^i(t) - e^i(t) = V_t \bar{\theta}^i, \quad t = 1,2, \dots, T \end{aligned} \tag{3.10}$$

Kako je vektor Lagrangeovih multiplikatora $\bar{\lambda}^i = \left(\bar{\lambda}_0^i, \bar{\lambda}_1^i, \dots, \bar{\lambda}_T^i\right)$ u funkciji Lagrangea pridružen $(T+1)$ budžetskom ograničenju potrošačevog problema kao problema maksimuma datog izrazom (3.6), tada, vektor Lagrangeovih multiplikatora predstavlja vektor granične korisnosti prihoda. Prema tome, pošto vektor Lagrangeovih multiplikatora predstavlja vektor granične korisnosti prihoda, sada na osnovu jednakosti date izrazom (3.8), možemo konstatovati da je vektor granične korisnosti prihoda $\bar{\lambda}^i$, jednak vektoru granične korisnosti potrošnje robe $grad\, u^i\left(\bar{c}^i\right)$. Pošto smo izvršili diskontovanje preko vektora diskontnog faktora $\beta = (\beta(0), \beta(1), \dots, \beta(S))$, svih vrednosti sa promptnog tržišta na vrednosti početnog vremenskog trenutka $t = 0$, i uspostavili odnos graničnih vrednosti potrošnje robe i dohotka u početnom vremenskom trenutku $t = 0$, imamo da je $\beta^i\left(\bar{c}^i\right) = \dfrac{1}{\lambda_0^i\left(\bar{c}^i\right)} grad\, u^i\left(\bar{c}^i\right) = \left(\dfrac{1}{\bar{\lambda}^i}\right)\bar{\lambda}^i$.

Vektor $\beta^i\left(\bar{c}^i\right)$ predstavlja **vektor sadašnje vrednosti potrošača** $i$ pri ravnotežnoj alokaciji potrošnje $\bar{c}^i$, i pri tome, normalizovani vektor $\bar{\beta}^i$ jednak je vektoru sadašnje vrednosti $\beta^i\left(\bar{c}^i\right)$, tj. $\bar{\beta}^i = \beta^i\left(\bar{c}^i\right)$, tako da je sada

$$\bar{\beta}^{i} = \left( \frac{1}{\bar{\lambda}_0^{i}} \right) \bar{\lambda}^{i} . \tag{3.11}$$

Na osnovu jednakosti date izrazom (3.9) i određenog vektora sadašnje vrednosti, naime primenom tvrđenja Teoreme 2.5 (Egzistencija diskontnog faktora), dobija se da je cena sredstva $j$ jednaka

$$\bar{q}_j = \sum_{t=1}^{T} \bar{\beta}_t^{i} V_t^j \text{, odnosno, } \bar{\beta}^{i} W = 0 . \tag{3.12}$$

Prema tome, izraz (3.12) predstavlja odluku potrošača $i$ kada je spreman uložiti u neko sredstvo $j$, odnosno odluku potrošača $i$ dajemo narednom posledicom.

**Posledica 3.5.** Potrošač ulaže u kupovinu sredstva $j$ samo kada je marginalni trošak dodatne jedinice nekog sredstva $j$ jednak graničnoj korisnosti od sredstva $j$, dakle, sadašnja vrednost za potrošača $i$ treba da je ekvivalentna sa budućim dividendama od sredstva $j$.

Budžetska ograničenja potrošača $i$ data u obliku jednačina (izraz (3.10)) sada možemo predstaviti izrazom

$$\bar{c}^{i} - e^i = W \bar{\theta}^{i} , \tag{3.13}$$

pri tome, vektor neto dohotka potrošača $i$, $r^i = c^i - e^i$, predstavlja takođe i vektor dohodovnih transfera. Sada na osnovu Teoreme 2.12 i Teoreme 2.5, imamo da vektor dohodovnih transfera (neto dohodovni vektor) $\bar{r}^{i}$ pripada prostoru dohodovnih transfera $\langle W \rangle$, i da je vektor diskontnog faktora $\bar{\beta}^{i}$ ortogonalan na svaki kolona vektor matrice $W$, tj. imamo da je $\bar{r}^{i} \in \langle W \rangle$, $\bar{\beta}^{i} \in \langle W \rangle^{\perp}$. Primenom stavova Teoreme 3.1, gradijent indirektne funkcije korisnosti potrošača pripada ortogonalnom potprostoru prostora $\langle W \rangle$, tj. $grad\, v^i\left(p, \bar{r}^i\right) \in \langle W \rangle^{\perp}$, odnosno vektor marginalne korisnosti dohotka pripada potprostoru $\langle W^{\perp} \rangle$ koji je ortogonalan na prostor $\langle W \rangle$.

Pošto je ekonomska realnost postojanje nepotpunog tržišta sredstava, neophodno je istražiti postojanje Paretoove optimalnosti u modelima opšte ekonomske ravnoteže nepotpune tržišne strukture, tj. modela opšte ekonomske ravnoteže sa tržištem sredstava gde je $\dim\langle W \rangle = J < T$, $\dim\langle W \rangle^{\perp} > 1$. Na osnovu do sada sprovedene analize, tj. na osnovu tvrđenja Teoreme 3.1 možemo konstatovati da gradijenti indirektne funkcije korisnosti potrošača pripadaju ortogonalnom potprostoru prostora $\langle W \rangle$, tj. $grad\, v^i\left(p, \bar{r}^i\right) \in \langle W \rangle^{\perp}$. Tvrđenje Teoreme 3.2 (Alokacija dohodovnih transfera i Paretoova optimalna alokacija) i sprovedenim dokazom pokazali smo da ravnotežna alokacija potrošnje $\left(\bar{c}^i\right)_{i \in N}$ je Paretoova optimalna alokacija ako i samo ako postoji vektor diskontnog faktora $\bar{\beta} \in R^{T+1}_{++}$, i ako postoje množitelji $\alpha^i \in R$, takvi da za svaki $i \in N$, gradijenti indirektne funkcije korisnosti potrošača su proporcionalni, tj. ako je za svaki $i$, $grad\, v^i\left(p, \bar{r}^i\right) = \alpha^i \bar{\beta}$, odnosno ako su normalizovani gradijenti potrošača $\beta\left(\bar{c}^1\right) = \beta\left(\bar{c}^2\right) = \ldots \beta\left(\bar{c}^I\right) = \bar{\beta}$, izjednačeni. Kako normalizovani gradijenti pripadaju ortogonalnom potprostoru $\langle W \rangle^{\perp}$ prostora $\langle W \rangle$, pri čemu je dimenzija ortogonalnog potprostora $\langle W \rangle^{\perp}$ veća od jedan, tj. $\dim\langle W \rangle^{\perp} > 1$, tada se ne može govoriti o odnosu proporcionalnosti gradijenata indirektne funkcije korisnosti potrošača odnosno ne postoji jednakost normalizovanih gradijenata potrošača, tj. nema podudarnosti vektora sadašnje vrednosti $\left(\beta\left(\overset{-}{c}^{\,i}\right)\right)_{i\in N}$ (ne postoji jedinstveni normalizovani vektor diskontnog faktora $\bar{\beta}$). Sada primenom stava Teoreme 3.2, možemo doneti zaključak da ravnotežna alokacija potrošnje $\left(\overset{-}{c}^{\,i}\right)_{i\in N}$ u modelima opšte ekonomske ravnoteže nepotpune tržišne strukture nije Paretoova optimalna alokacija.

Na osnovu sprovedene analize, rezultate do kojih smo došli sintetizovano dajemo kroz naredne posledice.

**Posledica 3.6.** U modelima opšte ekonomske ravnoteže sa potpunom tržišnom strukturom, tj. $\dim\langle W\rangle = T$, $\dim\langle W\rangle^{\perp} = 1$, postoji jedinstveni normalizovani vektor diskontnog faktora kao vektor sadašnje vrednosti $\bar{\beta}$ ($\bar{\beta}(0) = 1$), tj. vektori sadašnje vrednosti svih potrošača se podudaraju ($\beta\left(\overset{-}{c}^{\,1}\right) = \beta\left(\overset{-}{c}^{\,2}\right) = \ldots\ \beta\left(\overset{-}{c}^{\,I}\right) = \bar{\beta}$), i tada je ravnotežna alokacija potrošnje $\left(\overset{-}{c}^{\,i}\right)_{i\in N}$ Paretoova optimalna alokacija.

**Posledica 3.7.** U modelima opšte ekonomske ravnoteže sa nepotpunom tržišnom strukturom, tj. $\dim\langle W\rangle = J < T$, $\dim\langle W\rangle^{\perp} > 1$, **ne postoji** jedinstveni normalizovani vektor diskontnog faktora kao vektor sadašnje vrednosti $\bar{\beta}$ tj. vektori sadašnje vrednosti svih potrošača se ne podudaraju (različiti su) ($\beta\left(\overset{-}{c}^{\,1}\right) \neq \beta\left(\overset{-}{c}^{\,2}\right) \neq \ldots \neq \beta\left(\overset{-}{c}^{\,I}\right)$), i tada ravnotežna alokacija potrošnje $\left(\bar{c}^{i}\right)_{i\in N}$ nije Paretoova optimalna alokacija, dakle alokacija potrošnje $\left(\bar{c}^{i}\right)_{i\in N}$ je neefikasna u Paretoovom smislu.

## 4. Zaključci

Osnovni cilj ovog rada predstavlja ispitivanje Paretoove optimalnosti u modelu opšte ekonomske ravnoteže sa tržištem sredstava. Zapravo, analiza je u ovom radu sprovedena sa ciljem ispitivanja Paretoove optimalnosti u dinamičkom modelu opšte ekonomske ravnoteže u uslovima postojanja potpunog tržišta sredstava i u uslovima postojanja nepotpunog tržišta sredstava.

Model koji je definisan predstavlja model sekvencijalne tržišne strukture, koja se sastoji od promptnog tržišta roba za svaki vremenski trenutak i od tržišta sredstava na kojima sredstva kao instrumenti pružaju potrošačima (agentima) mogućnost redistribuiranja dohotka kroz diferencirane vremenske trenutke. Uključivanje sredstava kao instrumenata redistribucije dohotka u modele opšte ekonomske ravnoteže kroz diferencirane vremenske trenutke omogućilo je da se u tako definisanim dinamičkim modelima opšte ekonomske ravnoteže sa tržištem sredstava izvrši analiza relativnog odnosa cena roba, sa jedne strane, a sa druge strane je sprovedena analiza dohodovnih transfera između vremenskih trenutaka, kao i način formiranja cene sredstava na tržištu sredstava. U radu je pokazano da mora postojati odsustvo postupka sprovođenja arbitraže na tržištima sredstava kao neophodnog uslova za postojanje ravnotežnog stanja tržišta sredstava. Pošto smo matematički formulisali uslove za nepostojanje arbitraže na tržištima sredstava, u daljem istraživanju smo dokazali da postoji jedinstveni vektor cena sredstava kao diskontovanih vrednosti dividendi budućih vremenskih trenutaka.

Uvođenjem pretpostavke da je raspored (struktura) sredstava egzogeno zadata kategorija, istraživanja u ovom radu prevashodno su bila usmerena na ispitivanje Paretoove optimalnosti definisanog matematičkog modela opšte ekonomske ravnoteže u uslovima potpunog i nepotpunog tržišta sredstava. Prostor dohodovnih transfera određen je brojem linearno nezavisnih vektora vrednosne matrice dividendi. Pri tome, vektor dohodovnih transfera pripada prostoru vrednosne matrice dividendi, dok gradijent indirektne funkcije korisnosti potrošača, koji predstavlja vektor marginalne korisnosti dohotka, pripada ortogonalnom potprostoru prostora vrednosne matrice dividendi. Na osnovu sprovedene analize u modelu opšte ekonomske ravnoteže sa potpunim tržištem sredstava gradijenti indirektne funkcije korisnosti potrošača su proporcionalni, tako da je ravnotežna alokacija potrošnje Paretoova optimalna alokacija. Sa druge strane, u modelu opšte ekonomske ravnoteže sa nepotpunim tržištem sredstava, ne može se govoriti o odnosu proporcionalnosti gradijenata indirektne funkcije korisnosti potrošača, tj. nema podudarnosti vektora sadašnje vrednosti (ne postoji jedinstveni normalizovani vektor diskontnog faktora), tako da ravnotežna alokacija potrošnje nije Paretoova optimalna alokacija. Postojanje nesavršenih tržišnih uslova u obliku nepotpunog tržišta sredstava uslovljava smanjenu mogućnost dohodovnih transfera kroz vremenske trenutke posmatranog ekonomskog sistema, što ima za posledicu da ravnotežne alokacije nisu Paretoove optimalne alokacije. Dakle, na osnovu dobijenih rezultata, može se konstatovati da je za svaki ekonomski sistem koji teži Paretoovoj optimalnosti, neophodan razvoj tržišta sredstava i adekvatna redistribucija bogatstva potrošača.

Na kraju, potrebno je naglasiti da ovaj rad predstavlja samo početni korak u istraživanju Paretoove optimalnosti u uslovima kada ne postoji potpuno tržište sredstava. Dalja istraživanja u ovoj oblasti treba da detaljnije analiziraju uticaj različitih mera ekonomske politike kako na preraspodelu bogatstva potrošača, tako i na razvoj tržišta sredstava, a takođe razvoj i uvođenje novih oblika sredstava u ekonomski sistem. Adekvatnom primenom mera ekonomske politike bio bi smanjen uticaj nesavršenih tržišnih uslova, sa ciljem postizanja Paretoove optimalnosti posmatranog ekonomskog sistema.

## LITERATURA


Anderson R.M. i Raimondo R.C. (2004), *Incomplete Markets with no Hart Points*, University of California at Berkeley.

Andreasson N, Evgrafov A. i Patriksson M. (2004), *An Introduction to Optimization,* Chalmers University of Technology, Gëoteborg (Gothenburg), Sweden.

Arrow K.J. (1963), "Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care", *American Economic review*, 53, 941-973

Arrow K. i Debreu G. (1954), "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Econometrica*, 22, 265-292.

Balasko Y. (1988), *Fundations of the Theory of General Equilibrium*, Boston: Academic Press.

Borglin A. i Tvede M. (2004), *Economic Dynamics and General Equilibrium: Time and Uncertainty*, Springer Verlag.

Cass D. i Citanna A. (1998), "Pareto improving financial innovation in incomplete markets", *Economic Theory* 11, 467-494.

Cass D., Siconolfi P. i Villanacci A. (2001), "Generic Regularity of Comepitive Equilibria with Restricted Participation", *Journal of Mathematical Economics*, 36, 61-76.

Debreu G. (1983), "Economics of Uncertainty", in *Mathematical Economics*, chap. 8, Cambridge University Press, prevod rada iz 1953 sa francuskog na englesko govorno područje.

Debreu G. (1972), "Smooth Prefernces", *Econometrica*, 40.

Dierker E. (1974), *Topological Methods in Walrasian Economics*, Berlin: Springer Verlag.

Dubey P., Geanakoplos J. and Shubik M. (2002), "Default and Punishment in General Equilibrium", *Cowles Foundation Discussion Paper* 1304RR

Dubey P. i Geanakoplos J. (2003), "Real Determinacy with Nominal Assets", *Cowles Foundation Discussion Paper* 1427.

*Ekonomski rečnik*, (2001), Ekonomski fakultet Beograd, Beograd.

Fischer S. (1972), "Assets, Contingent Commodities, and the Slutsky Equation", *Econometrica*, 40, 371-386

Grodal B. i Vind K. (2005), "Equilibrium with arbitrary market structure", *Economic Theory* 25, 123–134, Springer-Verlag.

Herings P.J.J. i Polemarchakis H.M. (2003), "Pareto improving price regulation when the asset market is incomplete", *The Birgit Grodal Symposium*, Copenhagen, Discussion Papers 03-20.

Mas-Colell A. (1985), *The Theory of General Economic Equilibrium, A Differentiable Approach*, Cambridge University Press, Cambridge.

Magill M. i Quinzii M. (2002), *Theory of Incomplete Markets, Volume 1*, The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England.

Radner R., (1968), "Competitive Equilibrium under Uncertainty", *Econometrica*, 36, 31-58.

Radner R. (1982), "Equilibrium under Uncertainty", in *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 2, ed.: K. Arrow and M.D. Intriligator. Amsterdam:North-Holland.

Ross S.A. (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Assets Pricing", *Journal of Economic Theory*, 3, 343-362.

Varijan H.R. (2003), *Mikroekonomija*, redaktori prof. dr. Stojan Babić i prof. dr. Milić Milovanović, Ekonomski fakultet, Univerzitet u Beogradu.