*Zorica Mladenović** i *Pavle Mladenović*** DOI:10.2298/EKA0771032M

OCENA PARAMETRA VREDNOSTI PRI RIZIKU: EKONOMETRIJSKA ANALIZA I PRISTUP TEORIJE EKSTREMNIH VREDNOSTI***

ESTIMATION OF THE VALUE-AT-RISK PARAMETER: ECONOMETRIC ANALYSIS AND THE EXTREME VALUE THEORY APPROACH

APSTRAKT: *U radu smo razmatrali različite aspekte ocenjivanja parametra vrednosti pri riziku. Posmatrali smo kretanje dnevnih prinosa akcija kompanija CISCO i INTEL, kao i tržišnog indeksa NASDAQ, u periodu: septembar 1996 – septembar 2006. godina. Koristili smo metode kojima se obuhvataju svojstva vremenski promenljivog varijabiliteta i teških repova empirijske raspodele prinosa. Osnovni zaključak rada je da se primenom standardnih ekonometrijskih metoda potcenjuje parametar vrednosti pri riziku ukoliko se eksplicitno ne modeliraju teški repovi empirijske raspodele prinosa.*

KLJUČNE REČI: *vrednost pri riziku, uslovni varijabilitet, GARCH modeli, ekstremne vrednosti, raspodele sa teškim repovima.*

ABSTRACT: *In this paper different aspects of value-at-risk estimation are considered. Daily returns of CISCO, INTEL and NASDAQ stock indices are analysed for period: September 1996 – September 2006. Methods that incorporate time varying variability and heavy tails of the empirical distributions of returns are implemented. The main finding of the paper is that standard econometric methods underestimate the value-at-risk parameter if heavy tails of the empirical distribution are not explicitely taken into account.*

KEY WORDS: *value-at-risk, conditional variability, GARCH models, extreme values, heavy tailed distributions.*

* Ekonomski fakultet, Univerzitet u Beogradu

** Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

*** Rad je napisan uz podršku projekta Razvoj institucija i instrumenata finansijskog i hipotekarnog tržišta, broj 149041, koji finansira Ministarstvo nauke i zaštite životne sredine Republike Srbije.

1. UVOD

Koncept vrednosti pri riziku (engl. value-at-risk) predstavlja metodološki okvir za ocenu stepena izloženosti riziku učesnika na finansijskim tržištima. Cilj koncepta jeste ocena parametra vrednosti pri riziku, koji predstavlja maksimalni gubitak finansijske pozicije u određenom periodu vremena za datu verovatnoću. To znači da je u pitanju mera gubitka zbog pojave neočekivanih događaja. Na osnovu ovog pristupa finansijske institucije su u mogućnosti da odrede nivo kapitala koji im osigurava poziciju u uslovima ekstremnih kretanja. Koncept vrednosti pri riziku se odnosi na različite vrste finansijskih rizika, ali se najčešće primenjuje u analizi tržišnog rizika.

Vremenske serije na finansijskim tržištima često poseduju sledeća dva svojstva:

1. promenljivost varijabiliteta tokom vremena i

2. empirijska raspodela ima repove koji su teži od repova normalne raspodele.

Promenljivost varijabiliteta je pre svega karakteristika stopa prinosa finansijskih instrumenata. Učesnici na berzi reaguju na svaku novu informaciju tako što prodaju postojeće i kupuju nove akcije. To izaziva promene u ceni akcija, a time i u odgovarajućim stopama prinosa. Detaljnije sagledavanje nove informacije može dovesti do pada obima transakcija i do smirivanja berze. Prema tome, dolazak nove vesti utiče na rast varijabiliteta stopa prinosa, koji se smanjuje tokom vremena. Ponovni rast varijabiliteta verovatno će se javiti sa novom informacijom. To znači da stope prinosa finansijskih instrumenata prolaze kroz faze niskog i visokog varijabiliteta. Pri tome, postoji veći stepen korelisanosti između varijabiliteta prinosa nego između nivoa prinosa. Uočeno je da stepen varijabiliteta može zavisiti i od toga da li novu vest investitori tretiraju kao pozitivnu ili negativnu. Varijabilitet je izraženiji ukoliko informacija ima negativan karakter. Sa aspekta terminologije teorije verovatnoća ovde se razmatra uslovna varijansa. Ta uslovna varijansa, kako je već objašnjeno, menja se tokom vremena, tako da se često koristi i ekonometrijski termin koji označava nestabilnu varijansu slučajne greške modela – uslovna heteroskedastičnost. Osnovni tip modela uslovnog varijabiliteta je model uopštene autoregresione uslovne heteroskedastičnosti – GARCH model (engl. generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model, Bollerslev, 1986).

Rep raspodele verovatnoća neke slučajne promenljive određen je verovatnoćama događaja da slučajna promenljiva uzima vrednosti veće od nekog praga. Ta verovatnoća jako brzo opada ka nuli kada prag neograničeno raste, ako je raspodela normalna ili eksponencijalna, zato što odgovarajuća gustina raspodele teži nuli eksponencijalnom brzinom. Gustine raspodela Paretovog tipa opadaju ka nuli pri neograničenom rastu argumenta stepenom brzinom, dakle sporije, pa slučajne promenljive sa takvim raspodelama uzimaju velike vrednosti sa većim verovatnoćama. Kaže se da je rep, na primer, Paretove raspodele teži od repa normalne raspodele. Raspodele sa teškim repovima imaju značajnu ulogu u modeliranju ekstremnih događaja, što je predmet razmatranja teorije ekstremnih vrednosti. Kako se ekstremni događaji često javljaju u kretanju vremenskih serija na finansijskim tržištima, to je za adekvatno modeliranje empirijskih raspodela neophodna primena teorije ekstremnih vrednosti (Embrechts et al., 2003).

U literaturi su definisani različiti pristupi za ocenu parametra vrednosti pri riziku koji se mogu razvrstati u dve kategorije: faktorski modeli i modeli portfolia (Manganelli and Engle, 2004). Faktorski modeli se zasnivaju na izboru ključnih determinanti portfolia, odnosno glavnih faktora. Pretpostavlja se da je promenljivost rizika datog portfolia tokom vremena u potpunosti određena uslovnom varijansom glavnih faktora, kao i njihovom međusobnom korelacijom. Otuda se na osnovu ocena pojedinačnih uslovnih varijansi i koeficijenata korelacije izvodi odgovarajuća standardna devijacija portfolia, koja predstavlja osnovu za ocenu parametra vrednosti pri riziku. Pri tome se pretpostavlja da je raspodela prinosa u portfoliu normalna. Modeli portfolia su definisani pod pretpostavkom da kretanje prinosa u prethodnim periodima sadrži sve potrebne informacije za ocenu parametra vrednosti pri riziku. U zavisnosti od toga kako se modeliraju prethodne informacije razlikujemo sledeće tri ocene parametra vrednosti pri riziku: 1. kvantilna ocena, 2. ekonometrijska ocena i 3. ocena teorije ekstremnih vrednosti. Poslednjih nekoliko godina objavljen je veći broj radova u kojima su analizirana svojstva različitih ocena parametra vrednosti pri riziku (Manganelli and Engle, 2001, Embrechts et al., 2003, Gencay and Selcuk, 2004, Brooks et al., 2005, Tsay, 2005). Predložene su i modifikacije postojećih ocena u cilju objedinjavanja različitih pristupa.

Osnovni cilj ovog rada je prikaz ocena parametra vrednosti pri riziku koje se zasnivaju na analizi prethodno navedenih specifičnosti finansijskih vremenskih serija. To su ekonometrijska ocena i ocena po teoriji ekstremnih vrednosti. Ekonometrijska ocena parametra vrednosti pri riziku se izvodi iz GARCH modela, koji se koriste da bi se opisala vremenski promenljiva uslovna varijansa prinosa.

Ocena po teoriji ekstremnih vrednosti se zasniva na modeliranju repa empirijske raspodele, čime se apriori ne nameće često nerealna pretpostavka o normalnoj raspodeljenosti prinosa. Posebnu pažnju posvetićemo komparativnoj analizi metoda za dobijanje ove dve ocene sa aspekta konkretnog empirijskog istraživanja. Opredelili smo se da probleme sa kojima se istraživač susreće u postupku ocenjivanja ovog parametra objasnimo na primeru analize kretanja tri vremenske serije dnevnih prinosa cena akcija. U pitanju su dnevni prinosi indeksa cena akcija kompanija CISCO i INTEL, kao i tržišnog indeksa NASDAQ. Bilo bi interesantno modelirati serije prinosa sa finansijskog tržišta Srbije. Međutim, odgovarajući podaci su dostupni samo za kratak period vremena, što bi u velikoj meri smanjilo pouzdanost rezultata ocenjivanja parametra vrednosti pri riziku. To naravno ne umanjuje relevantnost metodologije koja je predmet razmatranja ovog rada.

Rad ima sledeću strukturu. U delu 2 smo formalno definisali parametar vrednosti pri riziku. U delu 3 smo objasnili ekonometrijsku ocenu vrednosti pri riziku. Deo 4 sadrži fundamentalne rezultate teorije ekstremnih vrednosti, dok je odgovarajuća ocena parametra vrednosti pri riziku data u delu 5. Deo 6 obuhvata rezultate empirijske analize. U delu 7 smo sumirali zaključke.

2. Definicija parametra vrednosti pri riziku

Neka je $S_0, S_1, S_2, \ldots$ niz nivoa cene datog finansijskog instrumenta u trenucima $t=0,1,2,\ldots$. Ovim pretpostavljamo da su cene date u diskretnim trenucima sa korakom koji može biti dan, nedelja ili mesec. U finansijskoj analizi relevantno je posmatrati niz prinosa koji se najčešće definiše sa:

$$(2.1) \quad R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}, t = 1,2,\ldots$$

Istorijski posmatrano, prvi model u analizi niza slučajnih promenljivih R_t zasniva se na pretpostavci da je njihova raspodela normalna. Ako se ta pretpostavka zapiše u obliku:

$$(2.2) \quad R_t = \mu + \sigma W_t, \sigma > 0,$$

gde je $W_t, t = 1,2,\ldots$ niz standardnih normalno raspodeljenih slučajnih promenljivih, onda se za horizont $t=h$ dobija:

$$(2.3) \quad \sum_{t=1}^{h} R_t = \ln S_h - \ln S_0 = \mu h + \sigma \sum_{t=1}^{h} W_t .$$

Odavde sledi da se cena S_h u trenutku h može zapisati u obliku:

$$(2.4) \quad S_h = S_0 \exp\left\{ \mu h + \sigma \sum_{t=1}^{h} W_t \right\},$$

što je poznati Blek-Šoulsov model u diskretnom slučaju.

Neka je sada $V_0, V_1, V_2, \ldots$ niz tržišnih vrednosti pojedinačnog finansijskog instrumenta u trenucima $t=0,1,2,\ldots$Na primer, $V_t=nS_t$, gde je n broj akcija, a S_t cena jedne akcije u trenutku t. Prema tome, V_0 i V_h označavaju redom tržišne vrednosti datog finansijskog instrumenta u trenutku $t=0$ i u budućem trenutku - $t=h$. Definišemo slučajnu promenljivu gubitka u trenutku h:

$$L_h = -(V_h - V_0) .$$

Ukoliko je vrednost L_h pozitivna, tada je došlo do gubitka i, obratno, negativna vrednost L_h označava da je ostvaren dobitak. Ovako definisana slučajna promenljiva gubitka pojednostavljuje primenu teorije ekstremnih vrednosti, koja je više prilagođena analizi maksimuma nego analizi minimuma. Teorija ekstremnih vrednosti je neophodna u analizi mogućnosti da dođe do velikih gubitaka, što je osnovni predmet našeg istraživanja.

U daljoj analizi gubitak ćemo izražavati u funkciji prinosa R_1, R_2, R_3,…, pa zato definišemo veličinu prinosa posle h koraka:

$$(2.5) \quad R(h) = \sum_{t=1}^{h} (-R_t)$$

kao zbir prinosa sa promenjenim znakom. Tada se veličina gubitka u trenutku h može predstaviti u obliku:

$$(2.6) \quad L_h = -(V_h - V_0) = V_0 - V_h = V_0 - V_0 \exp\left(\sum_{t=1}^{h} R_t \right) = V_0 \left(1 - e^{-R(h)} \right) \approx V_0 R(h).$$

Približna jednakost na kraju formule (2.6) važi ako je veličina $R(h)$ mala.

Vrednost pri riziku za verovatnoću $p \in (0,1)$ u trenutku h, u oznaci VaR(h,p) jeste ona vrednost koju gubitak u trenutku h ne premašuje sa verovatnoćom p. Ovako data definicija parametra VaR(h, p) može se zapisati u sledećem obliku (Reiss and Thomas, 2001):

$$(2.7) \quad P\{L_h \leq VaR(h,p)\} = p\ .$$

Od interesa su verovatnoće p bliske jedinici. Na primer, VaR(h,0.95) je ona vrednost koju gubitak ne premašuje sa verovatnoćom 0.95, odnosno vrednost od koje je gubitak veći sa verovatnoćom 0.05. S verovatnosne tačke gledišta jednakost (2.7) znači da VaR(h,p) predstavlja p-kvantil raspodele gubitka L_h.

Označimo sa $F_h(x)$ funkciju raspodele verovatnoća slučajne veličine $R(h)$:

$$(2.8) \quad F_h(x) = P\{R(h) \leq x\}$$

U cilju izbegavanja poteškoća tehničke prirode pretpostavimo da je funkcija raspodele $F_h(x)$ neprekidna i strogo rastuća. Tada za svako $p \in (0,1)$ važi $F_h(F_h^{-1}(p)) = p$, pa sledi:

$$(2.9) \quad P\{R(h) \leq F_h^{-1}(p)\} = F_h(F_h^{-1}(p)) = p.$$

Nejednakost $R(h) \leq F_h^{-1}(p)$ se može ekvivalentno transformisati na sledeći način:

$$(2.10) \quad V_0\left(1 - e^{-R(h)}\right) \leq V_0\left(1 - e^{-F_h^{-1}(p)}\right)$$

tako da se jednakost (2.9) može zapisati u obliku:

$$(2.11) \quad P\left\{V_0\left(1 - e^{-R(h)}\right) \leq V_0\left(1 - e^{-F_h^{-1}(p)}\right)\right\} = p$$

Ako uporedimo (2.7) i (2.11) i uzmemo u obzir da je $L_h = V_0\left(1-e^{-R(h)}\right)$, tada dobijamo:

$$(2.12) \quad VaR(h,p) = V_0\left(1-e^{-F_h^{-1}(p)}\right)$$

Prema tome, za dobijanje ocene parametra vrednosti pri riziku VaR(*h*,*p*) neophodno je oceniti *p*- kvantil $F_h^{-1}(p)$ raspodele slučajne veličine $R(h)$. To znači da preciznost ocene parametra vrednosti pri riziku zavisi od toga koliko dobro smo aproksimirali empirijsku funkciju raspodele. Često se za određivanje parametra vrednosti pri riziku umesto tačne vrednosti L_h koristi aproksimacija $V_0R(h)$ iz (2.6), a sam parametar se za datu verovatnoću *p* označava i sa $VaR_p(R(h))$.

3. Ekonometrijska ocena parametra vrednosti pri riziku

Standardni ekonometrijski okvir analize finansijskih vremenskih serija jeste model uopštene autoregresione uslovne heteroskedastičnosti. Model se može predstaviti na sledeći način (Bollerslev, 1986, Bollerslev et al., 1994):

$$(3.1a) \quad y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p}\phi_i y_{t-i} + e_t - \sum_{j=1}^{q}\theta_j e_{t-j}$$

$$e_t = \sigma_t u_t$$

$$(3.1b) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Jednačinom (3.1a) opisuje se nivo prinosa koji smo označili sa y_t. Pretpostavljamo da je u pitanju procentualna veličina (y_t =100 R_t). Jednačinom (3.1b) se modelira uslovna varijansa, $\sigma_t^2 = E\left((y_t - E(y_t))^2 \mid \Omega_{t-1}\right)$, prinosa y_t, gde je Ω_{t-1} raspoloživi skup informacija zaključno sa trenutkom *t-1*, dok je

$E(\bullet \mid \Omega_{t-1})$ standardna oznaka za uslovnu očekivanu vrednost u odnosu na dati skup informacija. Ovako definisana uslovna varijansa se uobičajeno naziva volatilnost.

Jednačina (3.1a) predstavlja autoregresioni model pokretnih sredina reda p i q, ARMA(p,q). Slučajan član modela, e_t, funkcija je od u_t, gde u_t označava niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse, koje imaju normalnu ili *t*-raspodelu. Jednačinom (3.1b) se opisuje uslovna varijansa prinosa y_t u funkciji od kvadrata slučajnih šokova u trenucima *t-1, t-2,...,t-m*, i uslovnog varijabiliteta u trenucima *t-1, t-2,...,t-s*. Model se uobičajeno označava kao GARCH(m,s). Sa $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ su obeleženi parametri jednačine (3.1a). Parametri $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_s$ jednačine uslovnog varijabiliteta (3.1b) zadovoljavaju sledeće uslove (Tsay, 2005):

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0, \quad \beta_1, \dots, \beta_s \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1.$$

Ovde se podrazumeva da je $\alpha_i = 0$ za $i > m$ i $\beta_j = 0$ za $j > s$.

Pretpostavimo da na osnovu prvih *n* opservacija vremenske serije y_t treba prognozirati buduće kretanje njenog nivoa i uslovnog varijabiliteta za *h* perioda unapred. Prognozirani nivo nepoznatog y_{n+h} označićemo sa $\hat{y}_n(h)$. Ocenjeni nivo varijabiliteta σ^2_{n+h} u trenutku *n+h*, označićemo sa $\hat{\sigma}^2_n(h)$. Ako bi parametri modela bili poznati, tada bi se prognoze za jedan period unapred (*h=1*) dobile na sledeći način:

$$(3.2a) \quad \hat{y}_n(1) = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{n+1-i} + e_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j e_{n+1-j}$$

$$(3.2b) \quad \hat{\sigma}^2_n(1) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e^2_{n+1-i} + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma^2_{n+1-j}$$

Ukoliko je u_t standardizovana normalno raspodeljena slučajna promenljiva, $u_t : N(0,1)$, tada je uslovna raspodela slučajne promenljive y_{n+1} za raspoložive informacije zaključno sa trenutkom n takođe normalna sa srednjom vrednošću $\hat{y}_n(1)$ i varijansom $\hat{\sigma}_n^2(1)$. Koristeći uobičajenu notaciju možemo pisati: $y_{n+1} : N(\hat{y}_n(1), \hat{\sigma}_n^2(1))$. Odavde sledi da se 5% -kvantil uslovne raspodele dobija na sledeći način: $\hat{y}_n(1) - 1.65\hat{\sigma}_n(1)$. Budući da y_{n+1} predstavlja prinos, to veličina $\hat{y}_n(1) - 1.65\hat{\sigma}_n(1)$ istovremeno označava ocenu (u procentima) parametra vrednosti pri riziku za horizont predviđanja 1 i verovatnoću 95%.

Ako slučajna promenljiva u_t poseduje standardizovanu t-raspodelu sa φ stepeni slobode, tada se ocena 5% kvantila uslovne raspodele prinosa u trenutku $n+1$ dobija kao: $\hat{y}_n(1) - t_\varphi^s \hat{\sigma}_n(1)$, gde je t_φ^s oznaka za standardizovanu kritičnu vrednost t-raspodele sa φ stepeni slobode. Kako je varijansa slučajne promenljive koja ima t-raspodelu sa φ stepeni slobode $\varphi/(\varphi-2)$, to je odgovarajuća standardizovana kritična vrednost $t_\varphi \Big/ \sqrt{\varphi/(\varphi-2)}$, pri čemu t_φ predstavlja kritičnu vrednost t-raspodele sa φ stepeni slobode na nivou značajnosti 5%.

Parametri GARCH modela su u praksi nepoznati i ocenjuju se primenom odgovarajućih ekonometrijskih metoda (Hamilton, 1994, Tsay, 2005). Na osnovu konkretnog uzorka dobijaju se ocene koje se koriste za predviđanje budućeg kretanja nivoa prinosa i uslovne varijanse. Potrebno je naglasiti da se u cilju ocenjivanja parametra vrednosti pri riziku za proizvoljni horizont predviđanja h i verovatnoću p prognoziraju nivo i uslovni varijabilitet vremenske serije oblika: $y_{n+1} + y_{n+2} + \ldots + y_{n+h}$. U pitanju je, kako smo već objasnili, procentualna promena cene finansijskog instrumenta koja se javlja tokom perioda dužine h.

Prirodno je postaviti pitanje metoda koji se upotrebljavaju u cilju prognoziranja budućeg kretanja nivoa prinosa i njegove volatilnosti. Prognozirane vrednosti nivoa prinosa se izvode na osnovu relativno poznatih algoritama predviđanja ARMA modelima. U istraživanjima naših autora daleko je manje prisutna prognoza buduće volatilnosti, odnosno izračunavanje $\hat{\sigma}_n^2(h), h = 1,2,\ldots$ Na primeru GARCH(1,1) modela, koji je jedan od najzastupljenijih u empirijskim istraživanjima, objasnićemo kako se dolazi do prognoze uslovne varijanse.

GARCH(1,1) model ima sledeći oblik:

$$(3.3a)\quad y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + e_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j e_{t-j}$$

$$e_t = \sigma_t u_t\ ,\ u_t : N(0,1)$$

$$(3.3b)\quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Stvarna vrednost uslovnog varijabiliteta u prvom nepoznatom trenutku *n+1* je:

$$\begin{aligned}(3.4)\quad \sigma_{n+1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 e_n^2 + \beta_1 \sigma_n^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 (u_n^2 \sigma_n^2) + \beta_1 \sigma_n^2 + \alpha_1 \sigma_n^2 - \alpha_1 \sigma_n^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_n^2 + \alpha_1 (u_n^2 - 1)\sigma_n^2 .\end{aligned}$$

Slično, uslovni varijabilitet u trenutku *n+2* je:

$$\begin{aligned}(3.5)\quad \sigma_{n+2}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 e_{n+1}^2 + \beta_1 \sigma_{n+1}^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{n+1}^2 + \alpha_1 (u_{n+1}^2 - 1)\sigma_{n+1}^2 .\end{aligned}$$

Ocena $\hat{\sigma}_n^2(1)$ uslovnog varijabiliteta σ_{n+1}^2 u trenutku *n+1*, prema uzorku zaključno sa podatkom u trenutku *n*, dobija se na sledeći način:

$$\begin{aligned}(3.6)\quad \hat{\sigma}_n^2(1) &= E\left(\sigma_{n+1}^2 \mid \Omega_n\right) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 e_n^2 + \beta_1 \sigma_n^2 .\end{aligned}$$

Ocena $\hat{\sigma}_n^2(2)$ uslovnog varijabiliteta σ_{n+2}^2 u trenutku *n+2*, dobija se na osnovu uzorka koji se završava u trenutku *n* prema:

$$(3.7)\qquad \hat{\sigma}_n^2(2) = E\left(\sigma_{n+2}^2 \mid \Omega_n\right)$$
$$= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{\sigma}_n^2(1) + \alpha_1 E\left((u_{n+1}^2 - 1) \mid \Omega_n\right)\sigma_{n+1}^2$$
$$= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\hat{\sigma}_n^2(1),\ zbog\ \ E\left((u_{n+1}^2 - 1) \mid \Omega_n\right) = 0.$$

U opštem slučaju, ocena $\hat{\sigma}_n^2(h)$ uslovnog varijabiliteta σ_{n+h}^2 u trenutku *n+h*, prema uzorku zaključno sa trenutkom *n*, je:

$$(3.8)\qquad \hat{\sigma}_n^2(h) = \alpha_0\left[1 + (\alpha_1+\beta_1) + (\alpha_1+\beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_1+\beta_1)^{(h-2)}\right] + (\alpha_1+\beta_1)^{h-1}\hat{\sigma}_n^2(1)$$
$$= \alpha_0 \frac{1-(\alpha_1+\beta_1)^{h-1}}{1-(\alpha_1+\beta_1)} + (\alpha_1+\beta_1)^{h-1}\hat{\sigma}_n^2(1).$$

Kako je prema definiciji modela zbir $\alpha_1 + \beta_1$ strogo manji od jedan, to se za dovoljno dugi horizont predviđanja ($h \to \infty$) prognoza uslovnog varijabiliteta svodi na $\frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+\beta_1)}$, što predstavlja bezuslovnu varijansu članova polaznog procesa y_t .

Ukoliko je zbir parametara jednačine volatiliteta GARCH(1,1) modela tačno jedan, $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, tada se modelom opisuje proces koji karakteriše neograničeni rast uslovnog varijabiliteta. U pitanju je tzv. integrisani GARCH model (oznaka: IGARCH(1,1)). Koristeći (3.8) dobijamo sledeću ocenu buduće uslovne varijanse IGARCH(1,1) modela:

$$(3.9)\qquad \hat{\sigma}_n^2(h) = \alpha_0(h-1) + \hat{\sigma}_n^2(1).$$

Uočavamo da na dugi rok prognoza uslovnog varijabiliteta zavisi od ocene uslovnog varijabiliteta u prvom budućem trenutku, od koje se dalje linearno povećava u zavisnosti od vrednosti slobodnog člana α_0 i horizonta predviđanja *h*. To znači da polazna ocena volatilnosti ima uticaj trajnog karaktera na prognozu dugoročne volatilnosti. Kada je vrednost slobodnog člana jednačine uslovne varijanse nula, tada je $\hat{\sigma}_n^2(h) = \hat{\sigma}_n^2(1)$, tako da se za sve horizonte predviđanja prognoza izjednačava sa ocenom uslovnog varijabiliteta u trenutku $n+1$.

Standardni pristup u merenju rizika (engl. Riskmetrics) sugeriše takvu ocenu parametra vrednosti pri riziku koja se izvodi iz IGARCH(1,1) modela uz sledeća ograničenja: 1. svi parametri jednačine nivoa prinosa su nula, 2. slobodan član u jednačini volatiliteta je nula i 3. slučajna greška modela ima normalnu raspodelu (RiskMetrics, 1996). To znači da se prema ovom metodu ocena parametra vrednosti pri riziku za verovatnoću od 95% dobija kao:

$$-1.65\,\hat{\sigma}_n(1).$$

Iako izuzetno jednostavna, primena IGARCH modela u oceni parametra vrednosti pri riziku je opravdana jedino ako se na osnovu ocene parametara modela i testiranja validnosti ograničenja $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ može zaključiti da izabrana specifikacija na adekvatan način aproksimira kretanje vremenske serije prinosa. U suprotnom, ocena parametra vrednosti pri riziku će verovatno biti neprecizna.

Poslednjih godina u empirijskim istraživanjima (na primer, Giot and Laurent, 2003) se koristi varijanta GARCH modela koja se naziva asimetrični stepeni ARCH model (engl. asymetric power ARCH model – APARCH). Jednačina volatiliteta jednostavnog APARCH(1,1) modela je (Ding et. al, 1993):

$$(3.10) \quad \sigma_t^{\delta} = \alpha_0 + \alpha_1\left(\left|e_{t-1}\right| - \omega e_{t-1}\right)^{\delta} + \beta_1 \sigma_{t-1}^{\delta}.$$

U odnosu na standardni GARCH(1,1) model jednačina volatiliteta sadrži dva nova parametra: δ i ω. Parametar δ (δ>0) označava eksponent uslovne standardne devijacije. Parametrom ω (-1<ω<1) se opisuje efekat asimetrije po kojem negativni i pozitivni šokovi imaju uticaj različitog karaktera na nivo volatiliteta. Pozitivna vrednost parametra ω sugeriše da negativni šokovi iz prethodnog perioda ($e_{t-1} < 0$) imaju veći uticaj na nivo tekuće volatilnosti od pozitivnih šokova ($e_{t-1} > 0$). Obratno, ako je vrednost parametra ω negativna, tada je uticaj pozitivnih šokova dominantan. Kao i kod GARCH modela i ovde se pretpostavlja da slučajna greška modela poseduje normalnu ili t raspodelu.

Ekonometrijska ocena parametra vrednosti pri riziku zavisi od ocena parametara odgovarajućeg GARCH modela. Dobijene ocene možemo smatrati pouzdanim jedino ukoliko primena testova specifikacije potvrdi da je model saglasan sa podacima. To prevashodno znači da reziduali modela treba da su neautokorelisani i homoskedastični. Budući da se primenom savremenih metoda ocenjivanja parametara GARCH modela dobijaju konzistentne ocene i u slučaju da reziduali nisu normalno raspodeljeni (pod pretpostavkom da je volatilnost korektno modelirana), za kvalitet modela nije neophodno da uslov o normalnoj raspodeli slučajne greške bude ispunjen. Međutim, ta pretpostavka je ključna za pouzdanost izloženih ocena parametra vrednosti pri riziku. Kako je već naglašeno, empirijska raspodela prinosa finansijskih instrumenata često poseduje repove koji su teži od repova normalne raspodele. Upravo zato se koriste GARCH modeli sa slučajnom greškom koja poseduje *t*-raspodelu, imajući u vidu da su repovi t-raspodele za mali broj stepeni slobode deblji od repova normalne raspodele. Međutim, očigledno je da postoji potreba da se eksplicitno modeliraju teški repovi empirijskih raspodela i prema dobijenim rezultatima ocenjuje parametar vrednosti pri riziku. Tome su posvećena naredna dva dela.

4. Osnove teorije ekstremnih vrednosti

Klasična teorija i uopštenje na stacionarne nizove

Zainteresovanost finansijskih institucija i investitora za mogućnost upravljanja maksimalnim rizicima kojima se mogu izložiti, otvara prostor za primenu matematičkih modela ekstremnih slučajnih događaja. Ovi modeli zavise od verovatnosnih svojstava ekstremnih vrednosti u familijama slučajnih promenljivih koje su od interesa za dati problem.

Formulisaćemo prvo osnovni rezultat klasične teorije ekstremnih vrednosti koji se odnosi na maksimume u nizu nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa istom funkcijom raspodele verovatnoća:

$$(4.1)\quad F(x) = P\{X_k \le x\}$$

i neka je $M_n = max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Osnovna teorema teorije ekstremnih vrednosti tvrdi sledeće:

Ako se maksimum M_n može linearno normirati tako da ima nedegenerisanu graničnu raspodelu, tj. ako postoje brojevi $a_n > 0$ i $b_n \in R$, i nedegenerisana funkcija raspodele $G(x)$, tako da za svaku njenu tačku neprekidnosti x važi

$$(4.2) \qquad \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right\} = G(x),$$

onda je funkcija raspodele G istog tipa kao jedna od sledeće tri funkcije raspodele:

$$(4.3a) \quad \Lambda(x) = exp\left\{-e^{-x}\right\}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$(4.3b) \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & ako\ je\ x < 0 \\ exp\left\{-x^{-\alpha}\right\}, & ako\ je\ x \ge 0; \end{cases}$$

$$(4.3c) \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} exp\left\{-(-x)^{\alpha}\right\}, & ako\ je\ x < 0 \\ 1, & ako\ je\ x \ge 0; \end{cases}$$

gde je $\alpha > 0$ takozvani parametar oblika. Ove raspodele poznate su pod imenom *raspodele ekstremnih vrednosti*. Konkretno, $\Lambda(x)$ je *Gumbelova* funkcija raspodele, $\Phi_\alpha(x)$ je *Frešeova* funkcija raspodele i $\Psi_\alpha(x)$ je *Vejbulova* funkcija raspodele. Osim ove tri funkcije raspodele, kao granične raspodele maksimuma mogu se pojaviti i funkcije koje se dobijaju linearnom transformacijom argumenata. Na primer, klasa Frešeovih raspodela zadaje se formulom:

$$(4.4) \quad \Phi_{\alpha,\mu,\beta}(x) = \begin{cases} 0, & ako\ je\ x < \mu \\ exp\left\{-\left(\dfrac{x-\mu}{\beta}\right)^{-\alpha}\right\}, & ako\ je\ x \ge \mu; \end{cases}$$

Parametar μ je parametar lokacije. Parametar $\beta > 0$ je parametar razmere.

Ako se za datu funkciju raspodele F članova niza $X_1, X_2, \ldots$, dobije da je G granična funkcija raspodele maksimuma M_n, onda kažemo da F pripada oblasti privlačenja funkcije G, što označavamo na sledeći način: $F \in D(G)$.

Raspodele ekstremnih vrednosti prvi put su dobijene u radu Fisher and Tippett (1928), a potrebni i dovoljni uslovi pri kojima neka funkcija raspodele *F* pripada oblastima privlačenja raspodela ekstremnih vrednosti određeni su u radu Gnedenko (1943). Detaljnije izlaganje o raspodelama ekstremnih vrednosti i njihovim oblastima privlačenja može se naći u knjizi Embrechts, Kluppelberg and Mikosch (2003) i na našem jeziku u Mladenović (2002). Pomenimo da je Lidbeter (Leadbetter, 1974) uopštio rezultat o tri moguća tipa graničnih raspodela za maksimume i na stacionarne nizove, koji zadovoljavaju određene uslove slabe zavisnosti.

γ - parametarizacija

Ako uvedemo smenu $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ za Frešeovu raspodelu i $\gamma = -\frac{1}{\alpha}$ za Vejbulovu raspodelu, onda se raspodele ekstremnih vrednosti mogu zapisati u obliku parametarske familije koja zavisi od jednog parametra na sledeći način:

$$(4.5) \qquad G_\gamma(x) = \begin{cases} exp\left\{-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}\right\}, & 1+\gamma x > 0, \ \ ako \ je \ \gamma \neq 0 \\ exp\left\{-e^{-x}\right\}, & ako \ je \ \gamma = 0; \end{cases}$$

U vezi sa γ-parametarizacijom familije raspodela ekstremnih vrednosti primetimo da je granična vrednost izraza $(1+\gamma x)^{-1/\gamma}$ jednaka e^{-x} kada γ teži nuli.

Metod blok maksimuma i metod vrhova iznad datog praga

Pri proučavanju ekstremnih vrednosti i ekstremnih slučajnih događaja neophodno je, osim najveće vrednosti u nekoj familiji slučajnih promenljivih, razmatrati veći broj maksimalnih vrednosti (koje su veće od ostalih). Maksimalne vrednosti se najčešće izdvajaju na jedan od sledeća dva načina: metodom blok maksimuma i metodom vrhova iznad datog praga. Metod blok maksimuma se sastoji u sledećem: niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ grupiše se hronološki u više blokova, a zatim se u svakom bloku bira najveća vrednost. Na ovaj način se dobijaju, na primer, mesečni maksimumi slučajnih promenljivih koje se menjaju tokom vremena. Metod vrhova iznad praga se sastoji u tome da se prvo odredi prag, a potom se izdvajaju članovi niza $X_1, X_2, \ldots, X_n$ koji su veći od tog praga. Ako se članovi pomenutog niza poređaju po veličini, tada se dobija varijacioni niz statistika poretka:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$$

Metodom vrhova iznad datog praga izdvaja se nekoliko maksimalnih statistika poretka. Broj maksimalnih statistika poretka koje treba uzeti u obzir zavisi od problema koji se razmatra. Asimptotskim raspodelama statistika poretka $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ posvećen je veliki broj radova u statističkoj literaturi. Prve i osnovne rezultate o tim raspodelama dobio je Smirnov (1949). Ovi rezultati se takođe mogu naći u knjizi Leadbetter, Lindgren and Rootzen (1983). Značajan je i rad Teugels (1981). Rezultati o asimptotskom ponašanju ekstremnih statistika poretka sistematski su izloženi u Galambos (1978).

Raspodele sa teškim repovima

U uvodnom delu je već rečeno da se vremenske serije na finansijskim tržištima često odlikuju svojstvom da empirijske raspodele imaju repove koji su teži od repova normalne raspodele. U literaturi se razmatraju mnoge raspodele i klase raspodela sa teškim repovima. Ne postoji usaglašena jedinstvena definicija ovih raspodela koja se svuda koristi. Vrlo često se kao tipična klasa raspodela sa teškim repovima razmatra klasa raspodela određena funkcijama raspodele verovatnoća *F*, čiji se desni rep može predstaviti u obliku:

$$(4.6) \quad 1-F(x)=L(x)x^{-\alpha}, \alpha>0,$$

gde je $L: R_+ \to R_+$ sporo promenljiva funkcija, odnosno funkcija takva da za svako $x>0$ važi:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)}=1.$$

Parametar $\alpha>0$ zove se *indeks pravilne promenljivosti*. Klasa funkcija raspodele koja zadovoljava uslov (4.6) predstavlja oblast privlačenja Frešeove funkcije raspodele za maksimume. Ona se koristi i za modeliranje raspodele stope prinosa cena finansijskih instrumenata, a time i za ocenu parametra vrednosti pri riziku. Osnovni statistički zadaci koji se pri tome javljaju su ocenjivanje indeksa pravilne promenljivosti i kvantila raspodele. Na sličan način se mogu definisati funkcije sa teškim levim repom, koje su od interesa pri proučavanju minimuma. Međutim, u teoriji ekstremnih vrednosti se analiza minimuma obično svodi na proučavanje maksimuma, tako što se podaci množe sa -1.

Generalisane Paretove raspodele

Generalisane Paretove raspodele zadaju se sledećom formulom:

$$(4.7) \quad G_{\gamma,\beta} = \begin{cases} 1-\left(1+\frac{\gamma x}{\beta}\right)^{-1/\gamma} & ako\ je\ \gamma \neq 0 \\ 1-exp\left\{-\frac{x}{\beta}\right\}, & ako\ je\ \gamma = 0; \end{cases}$$

gde je $\beta > 0$ parametar razmere. Osim toga, nosač raspodele $G_{\gamma,\beta}(x)$ je $x \geq 0$ ako je $\gamma \geq 0$, odnosno skup $0 \leq x \leq -\beta/\gamma$ ako je $\gamma < 0.$ Formule (4.5) i (4.7) upućuju na zaključak o tesnoj vezi između raspodela ekstremnih vrednosti i generalisanih Paretovih raspodela (Balkema and de Haan, 1974). Generalisane Paretove raspodele se koriste za ocenu parametra vrednosti pri riziku, što razmatramo u nastavku.

5. Ocene indeksa pravilne promenljivosti, kvantila raspodele i parametra vrednosti pri riziku primenom teorije ekstremnih vrednosti

U literaturi posvećenoj ekstremnim vrednostima postoje dva pristupa u ocenjivanju parametra vrednosti pri riziku. Oba pristupa koriste metod vrhova iznad datog praga za izdvajanje ekstremnih vrednosti. Prvi je poznat pod imenom semi-parametarski pristup i baziran je na Hilovoj oceni parametra $\alpha = \frac{1}{\gamma}$ u slučajevima kada je $\alpha > 0$ (Hill, 1975). Ako je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzorak iz raspodele koja pripada oblasti privlačenja Frešeove raspodele i $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ odgovarajući niz statistika poretka, onda se Hilova ocena parametra α definiše sa (Hill, 1975):

$$(5.1) \quad \hat{\alpha}^H = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \ln X_{(n-i+1)} - \ln X_{(n-k)}.$$

Dokazana je konsistentnost i asimptotska normalnost Hilove ocene u slučaju nizova nezavisnih slučajnih promenljivih, kao i za neke klase stacionarnih nizova (Beirlant and Teugels, 1989, Deheuvels et al., 1988, Beirlant et al., 1996 i Embrechts et al., 2003).

Ako slučajne promenljive X_k imaju raspodelu Paretovog tipa, tada je ocena parametra vrednosti pri riziku za horizont *h=1* i verovatnoću *p* data sa:

$$(5.2) \quad \hat{Var}_p(X) = X_{(n-k)}\left(\frac{n}{k}(1-p)\right)^{-1/\hat{\alpha}},$$

gde je $\hat{\alpha}$ Hilova ocena parametra α.

Drugi postupak za ocenjivanje parametra vrednosti pri riziku korišćenjem teorije ekstremnih vrednosti je parametarski pristup, koji se zasniva na prekoračenjima visokog praga. Ovaj pristup je više zastupljen u praktičnim analizama rizika od semi-parametarskog pristupa, pa ćemo ga i mi koristiti u našem empirijskom radu. U nastavku ćemo objasniti postupak parametarskog ocenjivanja.

Neka su $X_1, X_2, ..., X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa zajedničkom funkcijom raspodele *F* koja pripada oblasti privlačenja generalisane funkcije raspodele ekstremnih vrednosti $G_\gamma(x)$, za neki parametar $\gamma \in R$. Označimo sa N_u broj onih od slučajnih promenljivih $X_1, X_2, ..., X_n$, koje uzimaju vrednost veću od (visokog) praga *u* i sa $F_u(t)$ funkciju raspodele prekoračenja praga *u* koje čini slučajna promenljiva X_k, odnosno

$$(5.3) \quad F_u(t) = P\{X - u \le t \mid X > u\}, \qquad t \ge 0.$$

Za dati prag *u* i svako $t > 0$ imamo da je:

$$(5.4) \quad P\{X_k > u + t\} = P\{X_k > u\}P\{X_k - u > t \mid X_k > u\}.$$

Ako označimo $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ i $\overline{F}_u(x) = 1 - F_u(x)$, onda važi:

$$(5.5) \quad \overline{F}(u+t) = \overline{F}(u)\overline{F}_u(t).$$

Druga osnovna teorema teorije ekstremnih vrednosti (Balkema and de Haan, 1974 i Embrechts et al., 2003) tvrdi da je

$$(5.6) \qquad \lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0<x<x_F-u} |\overline{F}_u(x) - \overline{G}_{\gamma,\beta(u)}| = 0$$

za pogodno izabranu pozitivnu funkciju $\beta = \beta(u)$ i gde je

$$(5.7) \qquad x_F = sup\{x \in R \mid F(x) < 1\} \leq +\infty .$$

To znači da se rep funkcije raspodele $\overline{F}_u(x)$ prekoračenja slučajne veličine X_k iznad visokog praga aproksimira repom funkcije raspodele generalisane Pareto-ve raspodele, tako da važi:

$$(5.8) \qquad \overline{F}_u(t) \approx \overline{G}_{\gamma,\beta(u)}(t).$$

Ako je prag izabran, tada se parametri γ i β, koji određuju generalisanu Paretovu raspodelu $G_{\gamma,\beta(u)}$, mogu oceniti. Pri tome, uobičajeno se koristi metod maksimalne verodostojnosti. Pošto se ocene parametri γ i β, onda se za ocenu $\hat{\overline{F}}_u(t)$ funkcije $\overline{F}_u(t)$ uzima $\overline{G}_{\hat{\gamma},\hat{\beta}}(t)$, a $\overline{F}(u)$ se ocenjuje empirijskom funkcijom raspodele kao:

$$(5.9) \qquad \hat{\overline{F}}(u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i > u\} = \frac{N_u}{n}.$$

Ako sa x_p označimo p-kvantil raspodele slučajne promenljive X_k, odnosno broj za koji važi: $F(x_p) = p,$ onda je ocena tog kvantila, a time i ocena parametra vrednosti pri riziku za horizont $h=1$ i verovatnoću p data sa:

$$(5.10) \qquad \hat{x}_p = \hat{V}ar_p(X) = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\gamma}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-p)\right)^{-\hat{\gamma}} - 1\right)$$

gde su sa $\hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$ označene ocene odgovarajućih parametara.

Potrebno je još objasniti kako se bira prag u. U praksi se najčešće koristi grafički pristup koji se sastoji u sledećem. Za slučajnu promenljivu X sa funkcijom raspodele F definišu se (Embrechts et al., 2003):

- Funkcija raspodele prekoračenja praga *u*:

$$(5.11) \quad F_u(x) = P\{X - u \le x \mid X > u\} \; za \; 0 \le x \le x_F - u$$

- Funkcija srednjeg prekoračenja praga *u* koje čini slučajna promenljiva X:

$$(5.12) \quad e_X(u) = E(X - u \mid X > u) = \int_0^{x_F - u} dF_u(x).$$

Ako slučajna promenljiva X ima generalisanu Paretovu raspodelu sa parametrima $\gamma < 1$ i β, onda za $u < x_F$ važi:

$$(5.13) \quad e_X(u) = \frac{\beta + \gamma u}{1 - \gamma}, \qquad \beta + \gamma u > 0 .$$

To znači da je funkcija $e_X(u)$ linearna. Empirijska funkcija srednjeg prekoračenja praga *u* je:

$$(5.14) \quad e_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i \in \Delta_n(u)} (X_i - u)$$

gde je $\Delta_n(u)$ skup indeksa *i* za koje važi nejednakost $X_i > u$. Prema tome, prag *u* se bira tako da je funkcija $e_n(x)$ približno linearna za $x \ge u$.

6. Empirijska analiza[1]

Svrha empirijske analize jeste ocena parametra vrednosti pri riziku za dnevne stope prinosa sledeće tri vremenske serije:

1. indeks cena akcija kompanije CISCO

2. indeks cena akcija kompanije INTEL i

3. tržišni indeks NASDAQ.

---

[1] Empirijski rezultati su dobijeni korišćenjem programskih paketa EVIEWS5.1 (User's Guide, 2004) i XTREMES (Reiss and Thomas, 2001).

Razmatrali smo ove tri vremenske serije na dnevnom nivou u periodu od 3. 9. 1996 do 15.9. 2006. godine (ukupno 2527 podataka). Polazni podaci su logaritmovani. Dnevne stope prinosa se obrazuju kao razlika logaritmovanih nivoa cena u dva sukcesivna dana, koja je pomnožena sa 100. Podaci su preuzeti sa internet adrese: finance.yahoo.com. Neke od ovih vremenskih serija su bile predmet sličnih empirijskih analiza. Na primer, u radu Bradley and Taqqu (2003) analiziran je tržišni indeks NASDAQ, o čemu će kasnije biti više reči. Naše istraživanje zasniva se na uzorku koje obuhvata novije podatke, tako da su rezultati koji slede samo delimično uporedivi sa već postojećim.

6.1. Ocena parametra vrednosti pri riziku dnevnog prinosa akcija kompanije CISCO

Nivo cena akcije kompanije CISCO prati putanju slučajnog hoda (grafik 6.1). Stopa prinosa je stacionarna, ali je primetno postojanje nekoliko nestandardnih opservacija. Imajući u vidu da jednokratni strukturni lomovi mogu dovesti do pogrešnih statističkih i ekonometrijskih zaključaka, iz serije prinosa smo izdvojili četiri najizraženije nestandardne opservacije. Faktički, data vremenska serija je ocenjena u zavisnosti od konstante i veštačke promenljive koju smo definisali tako da uzima jedine nenulte vrednosti stvarnih stopa prinosa za redne brojeve podataka 328, 515, 707 i 818. Ovako korigovana stopa prinosa je predmet našeg empirijskog istraživanja (videti grafik 6.1). U daljem izlaganju nazivaćemo je samo dnevna stopa prinosa.

Empirijska raspodela dnevne stope prinosa odstupa od normalne raspodele. Na takav zaključak upućuju koeficijenti asimetrije i spljoštenosti, kao i zbirni pokazatelj normalnosti- Žark-Bera (JB) test-statistika. Takođe, histogram date serije i Q-Q dijagram, koji predstavlja skup parova kvantila raspodele same serije i kvantila normalne raspodele, ukazuju na to da postoji nizak stepen slaganja empirijske raspodele sa normalnom (grafik 6.2). Naime, empirijska raspodela prinosa se može aproksimirati normalnom raspodelom ako se odgovarajući parovi kvantila nalaze na pravoj liniji. To ovde nije slučaj. Dnevnu stopu prinosa karakteriše nestabilnost varijanse tokom vremena, što zaključujemo prema izrazito visokim vrednostima Q^2 i ARCH test-statistike. Ove, kao i ostale deskriptivne statistike, su sumirane u tabeli 6.1.

Tabela 6.1. Osnovne deskriptivne statistike dnevne stope prinosa akcija kompanije CISCO

Standard. devijacija	Koef. asimetrije	Koef. spljoštenosti	JB	$Q^2(10)$	$Q^2(30)$	ARCH(10)	ARCH(30)
3.14	0.16	7.46	2107(0.0)	484.2(0.0)	1075.1(0.0)	227.3(0.0)	283.74(0.0)

Napomene za ovu i naredne tabele:

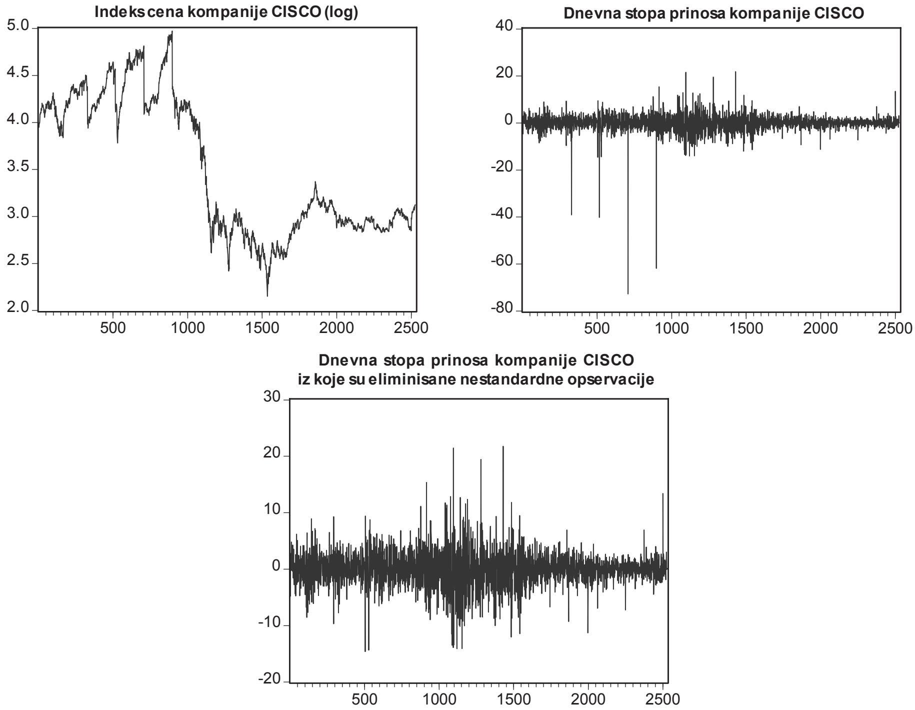
1. Žark-Bera (Jarque-Bera) test normalnosti, koji se definiše na osnovu koeficijenata asimetrije i spljoštenosti, označen je sa JB. Ukoliko je tačna nulta hipoteza o normalnosti stope prinosa, tada JB test-statistika poseduje asimptotski χ^2 raspodelu sa dva stepena slobode.

2. Sa $Q^2(k)$ smo označili Boks-Ljungovu (Box-Ljung) test-statistiku za ispitivanje postojanja autokorelacije reda k u kvadriranim podacima. Time se proverava prisustvo autoregresione heteroskedastičnosti. Ako je istinita nulta hipoteza da su prvih k autokorelacionih koeficijenata kvadriranih podataka jednaki nuli, onda ova test-statistika poseduje asimptotski χ^2 raspodelu sa k stepeni slobode.

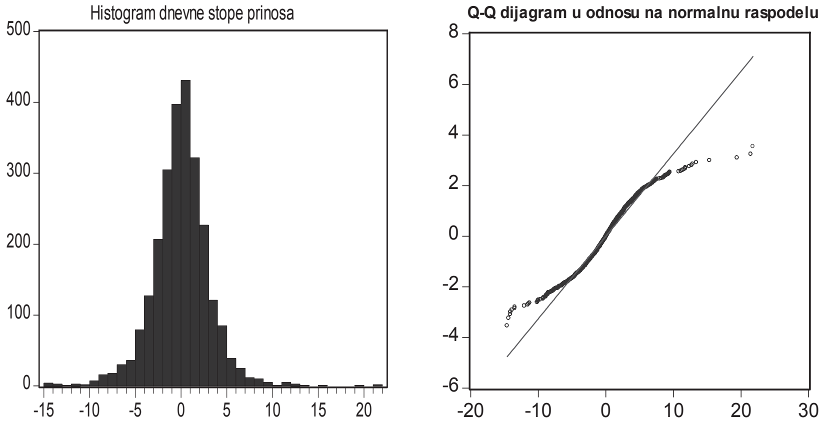
3. Za proveru postojanja vremenski promenljivog varijabiliteta koristi se i ARCH(k) statistika. U pitanju je test-statistika uslovne autoregresione heteroskedastičnosti koja se računa kao proizvod obima uzorka i koeficijenta determinacije iz modela u kojem se kvadrirani podaci ocenjuju u zavisnosti od k svojih prethodnih vrednosti. Ako je tačna nulta hipoteza o odsustvu autoregresione heteroskedatičnosti reda k, tada ARCH(k) test-statistika poseduje asimptotski χ^2 raspodelu sa k stepeni slobode.

4. Vrednost u zagradi pored vrednosti test-statistike je odgovarajuća *p*-vrednost.

Grafik 6.1. Indeks cena kompanije CISCO, dnevna stopa prinosa i dnevna stopa prinosa iz koje su izdvojene nestandardne opservacije



Grafik 6.2. Stepen saglasnosti empirijske raspodele dnevne stope prinosa akcija kompanije CISCO sa normalnom raspodelom



Budući da dnevna stopa prinosa akcija kompanije CISCO ima nestabilnu varijansu, prirodno je oceniti njenu dinamiku na osnovu GARCH modela. Analiza specifikacije sugeriše da se GARCH(1,1) modelom opisuje kretanje volatiliteta na zadovoljavajući način. Dodatno smo ocenili i APARCH(1,1) model koji takođe poseduje solidna statistička svojstva. Zbirno prikazano, ocenili smo sledeća četiri modela:

1. GARCH(1,1) model sa normalnom raspodelom

2. GARCH(1,1) model sa *t*-raspodelom

3. APARCH(1,1) model sa normalnom raspodelom i

4. APARCH(1,1) model sa *t*-raspodelom.

Tabela 6.2. sadrži ocenjene parametre modela zajedno sa rezidualnim testovima autokorelacije, normalnosti i uslovne heteroskedastičnosti. Na osnovu ocenjenih modela prognozirali smo kretanje buduće stope prinosa i volatilnosti za jedan dan unapred. Te prognoze su neophodne da bi se ocenio parametar vrednosti pri riziku. Dobijene ocene parametra vrednosti pri riziku za jedan dan unapred i verovatnoće 95% i 99% date su u tabeli 6.3. Potrebno je napomenuti - da se ekonometrijskim pristupom dobijaju negativne vrednosti ocena. Negativan znak se obično ignoriše, jer se podrazumeva da je u pitanju pokazatelj gubitka (Tsay, 2005).

Tabela 6.2. Ocene parametara GARCH i APARCH modela stope prinosa akcija CISCO

Ocene parametara	GARCH (1,1) sa normalnom raspodelom	GARCH(1,1) sa *t*-raspodelom	APARCH(1,1) sa normalnom raspodelom	APARCH(1,1) sa *t*-raspodelom
α_0	0.045 (2.00)	0.008 (1.06)	0.986 (2.39)	0.018 (2.77)
α_1	0.051 (4.98)	0.034 (5.96)	0.122 (5.07)	0.059 (6.89)
β_1	0.945 (99.12)	0.966 (174.08)	0.767 (23.45)	0.945 (120.72)
ω	-	-	0.390 (5.78)	0.508 (4.24)

δ	-	-	2.598 (7.23)	0.891 (4.14)
Broj stepeni slobode *t*-raspodele	-	7.28 (9.83)	-	8.46 (7.97)
Testovi specifikacije	GARCH (1,1) sa normalnom raspodelom	GARCH(1,1) sa *t*-raspodelom	APARCH(1,1) sa normalnom raspodelom	APARCH(1,1) sa *t*-raspodelom
Koeficijent asimetrije	0.07	0.07	0.04	-0.03
Koeficijent spljoštenosti	6.55	7.16	5.02	5.38
JB	1326.44	1824.75	429.09	594.40
$Q^2(30)$	14.61(0.99)	15.49(0.99)	28.51(0.49)	22.04(0.85)
ARCH(10)	4.35(0.93)	5.64(0.84)	7.61(0.67)	5.88(0.82)

Napomene: U jednačinama srednje vrednosti nema ARMA komponenti. U zagradama ispod ocena parametara nalaze se odgovarajući t-odnosi. U zagradama pored vrednosti test-statistika su date odgovarajuće *p*-vrednosti. Parametri modela su ocenjeni primenom BHHH algoritma (Hamilton, 1994).

Tabela 6.3. Ekonometrijska ocena parametra vrednosti pri riziku za period od jednog dana (stopa prinosa akcija kompanije CISCO)

Model	GARCH (1,1) sa normalnom raspodelom	GARCH(1,1) sa t-raspodelom	APARCH(1,1) sa normalnom raspodelom	APARCH(1,1) sa t- raspodelom
Prognoza prinosa $\hat{y}_n(1)$	0.0929	0.0836	0.0694	0.0603
Prognoza uslovne varijanse $\hat{\sigma}_n^2(1)$	4.6378	4.7207	3.3749	2.1617
$V\hat{a}R(1,0.95)$	3.46%	3.40%	2.96%	2.31%
$V\hat{a}R(1,0.99)$	4.92%	5.42%	4.21%	3.63%

Dobijene ocene parametra vrednosti pri riziku se značajno razlikuju u zavisnosti od izabrane specifikacije. Na osnovu GARCH(1,1) modela ocenjeni gubitak finansijske pozicije je znatno veći nego što je to slučaj sa APARCH(1,1) specifikacijom. Ovakav rezultat zahteva dodatnu analizu kako bismo izabrali bolji model. Korišćenjem kriterijuma maksimuma funkcije verodostojnosti, koji je aproksimativno određen, zaključujemo da je to GARCH specifikacija. U ovoj klasi modela obe varijante (sa normalnom i *t*-raspodelom) daju približno jednake ocene parametra vrednosti pri riziku.

Ocena parametra vrednosti pri riziku 3.46% može se interpretirati na sledeći način: ako raspolažemo akcijama kompanije CISCO u vrednosti od, na primer, 10000 dolara, tada gubitak koji možemo da imamo u periodu od jednog dana nije veći od 346 dolara sa verovatnoćom 95%. Ocena tog maksimalnog gubitka sa verovatnoćom 99% je 492 dolara.

Primećujemo da su u ocenjenim modelima reziduali simetrično raspodeljeni (koeficijent asimetrije je skoro nula), što nije slučaj sa samom serijom (koeficijent asimetrije je 0.16). To znači da ocenjeni modeli dobro aproksimiraju sistemski deo kretanja stope prinosa, odnosno centralni deo njene empirijske raspodele. Iako je koeficijent spljoštenosti raspodele reziduala manji od koeficijenta spljoštenosti raspodele stope prinosa, raspodela reziduala je, kao i raspodela serije prinosa, manje spljoštena od normalne raspodele. Drugim rečima, repovi raspodele su teži od repova normalne raspodele. To otvara prostor za eksplicitno modeliranje repa empirijske raspodele stope prinosa i ocenu parametra vrednosti pri riziku na osnovu indeksa repa raspodele.

Skup ekstremnih događaja smo odredili na osnovu opservacija koje su veće od 95% kvantila funkcije raspodele negativne stope prinosa. Takav skup sadrži 127 podataka. Na bazi ovog skupa modeliramo raspodelu maksimuma negativne stope prinosa indeksa CISCO.

Empirijsku raspodelu maksimuma negativne stope prinosa smo aproksimirali Frešeovom raspodelom sa sledećim ocenama parametara: $\hat{\gamma} = 0.206,\ \hat{\mu} = 6.196,\ \hat{\beta} = 1.276$. Navedene ocene smo dobili primenom metoda maksimalne verodostojnosti. Metodom replikacije na osnovu 10000 ponavljanja odredili smo da se sa verovatnoćom 95% parametar γ nalazi u intervalu (0.177, 0.234), a parametar β u intervalu (1.083, 1.434). Primena testa količnika verodostojnosti sugeriše da je parametar γ značajno različit od nule (p-vrednost=0.00), čime se potvrđuje opravdanost korišćenja Frešeove raspodele. Visok stepen slaganja empirijske funkcije raspodele maksimuma negativne stope prinosa sa ocenjenom funkcijom Frešeove raspodele potvđuje grafik 6.3 na kojem su nacrtane obe funkcije.

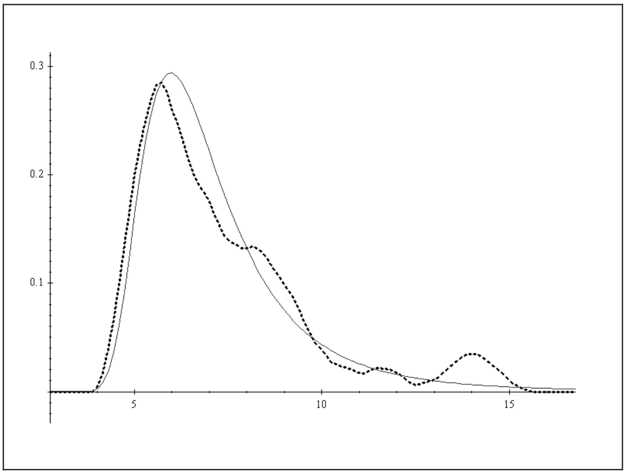
Imajući u vidu da rezultati modeliranja repa raspodele mogu biti osetljivi na autokorelaciju i heteroskedastičnost u podacima, posebno smo razmatrali funkciju maksimuma negativne stope prinosa iz koje smo izdvojili uticaje autokorelacije i heteroskedastičnosti (McNeil and Frey, 2000). U pitanju je serija standardizovanih reziduala iz ocenjenog GARCH modela. Opredelili smo se za reziduale iz GARCH(1,1) modela sa normalnom raspodelom. Sada su ocenjeni parametri redom: $\hat{\gamma} = 0.172,\ \hat{\mu} = 1.855,\ \hat{\beta} = 0.319$. Uočavamo da su se promenile ocene parametara lokacije ($\hat{\mu}$) i razmere ($\hat{\beta}$), ali da je ocena $\hat{\gamma}$ ključnog parametra raspodele, recipročne vrednosti indeksa repa, ostala gotovo ista.

Koristeći relaciju (5.10) i rezultate modeliranja originalnih podataka izračunali smo da je vrednost parametra pri riziku oko 4.92% za verovatnoću 95%, odnosno 7.35% za verovatnoću 99%. Ukoliko uzmemo u obzir rezultate modeliranja standardizovanih reziduala, tada su ocene parametra vrednosti pri riziku za verovatnoće 95% i 99% redom 4.91% i 5.50%. Primećujemo da oba pristupa daju skoro identičnu ocenu parametra za verovatnoću 95%. Međutim, ocene se bitno razlikuju za verovatnoću 99%: ocena dobijena analizom originalnih podataka je veća od ocene koja je izvedena iz podataka u kojima su otklonjeni efekti rastućeg varijabiliteta. Rezultati su sumirani u tabeli 6.4.

Tabela 6.4. Ocena parametra vrednosti pri riziku primenom teorije ekstremnih vrednosti za period od jednog dana (stopa prinosa akcija kompanije CISCO)

	$\hat{\gamma} = 0.206,\ \hat{\mu} = 6.196,\ \hat{\beta} = 1.276$	$\hat{\gamma} = 0.172,\ \hat{\mu} = 1.855,\ \hat{\beta} = 0.319$
$V\hat{a}R(1, 0.95)$	4.92%	4.91%
$V\hat{a}R(1, 0.99)$	7.35%	5.50%

Grafik 6.3. Empirijska raspodela maksimuma negativne stope prinosa akcija kompanije CISCO (isprekidana linija) i ocenjena Frešeova gustina raspodele (puna linija)



Kada uporedimo ocene parametra vrednosti pri riziku koje su dobijene ekonometrijskim metodom i primenom teorije ekstremnih vrednosti zaključujemo da su ekonometrijske ocene manje od ocena teorije ekstremnih vrednosti. Budući da empirijsku raspodelu stope prinosa akcija kompanije CISCO karakterišu teški repovi, ovakav rezultat je očekivan.

6.2. Ocena parametra vrednosti pri riziku dnevnog prinosa akcija kompanije INTEL

Vremenska serija dnevnih prinosa akcija kompanije INTEL u razmatranom periodu poseduje statistička svojstva koja su slična svojstvima prethodno analizirane serije dnevnog prinosa akcije kompanije CISCO: uslovna varijansa je vremenski promenljiva i empirijska raspodela ima teže repove od normalne raspodele. U ekonometrijskoj analizi smo koristili tri različita modela na osnovu kojih smo dobili približno iste ocene parametra vrednosti pri riziku. Rezultate ekonometrijskog ocenjivanja smo prikazali u tabeli 6.5.

Tabela 6.5. Ekonometrijska ocena parametra vrednosti pri riziku za period od jednog dana stope prinosa akcija kompanije INTEL

Model	GARCH (1,1) sa normalnom raspodelom	GARCH(1,1) sa *t*-raspodelom	APARCH(1,1) sa *t*-raspodelom
Prognoza prinosa $\hat{y}_n(1)$	0.0656	0.0453	0.0247
Prognoza uslovne varijanse $\hat{\sigma}_n^2(1)$	3.2784	3.3284	2.8368
$V\hat{a}R(1, 0.95)$	2.92%	2.88%	2.69%
$V\hat{a}R(1, 0.99)$	4.15%	4.58%	4.20%

Da bismo ocenili parametar vrednosti pri riziku primenom teorije ekstremnih vrednosti, potrebno je da definišemo skup ekstremnih podataka. To smo uradili na dva načina. Prvo, korišćenjem kvantila funkcije raspodele negativne stope prinosa izdvojili smo 127 podataka koji su veći od korespondirajuće vrednosti 95% kvantila. Drugo, na osnovu analize grafičkog prikaza funkcije srednjeg prekoračenja (grafik 6.4) možemo zaključiti da funkcija linearno raste od vrednosti 5.5. Postoji ukupno 71 opservacija koje su veće od ovako definisanog praga. Prema tome, analiziraćemo desni rep empirijske raspodele negativne stope prinosa na osnovu dva skupa ekstremnih događaja. Jedan se sastoji od 127, a drugi od 71 podataka.

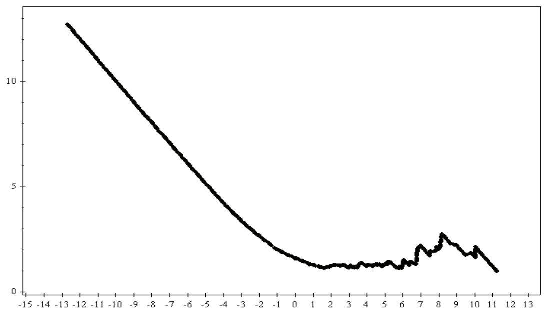
Oba skupa ekstremnih podataka smo solidno aproksimirali Frešeovom raspodelom, što potvrđuje i njihov grafički prikaz (grafici 6.5a i 6.5b). U tabeli 6.6 smo dali tačkaste i intervalne ocene parametara Frešeove raspodele, kao i odgovarajuće ocene parametra vrednosti pri riziku. Uočavamo da oba metoda izbora praga daju približno iste ocene, kako parametara raspodele, tako i parametra vrednosti pri riziku.

Tabela 6.6. Ocena parametra vrednosti pri riziku primenom teorije ekstremnih vrednosti za period od jednog dana (stopa prinosa akcija kompanije INTEL)

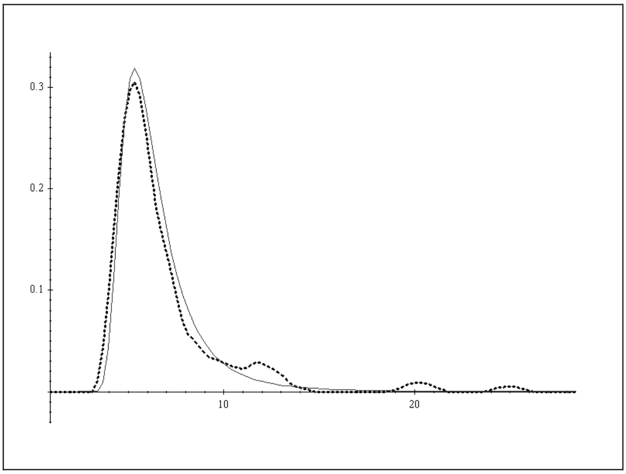
Broj prekoračenja praga	127	71
Ocene parametara	$\hat{\gamma}=0.212,\ \hat{\mu}=5.541,\ \hat{\beta}=1.177$	$\hat{\gamma}=0.203,\ \hat{\mu}=6.780,\ \hat{\beta}=1.381$
Intervalne ocene	$\gamma\in(0.182,0.239)$, $\beta\in(1.100, 1.361)$	$\gamma\in(0.167,0.238)$, $\beta\in(1.101, 1.650)$
$V\hat{a}R(1,0.95)$	4.43%	4.75%
$V\hat{a}R(1,0.99)$	6.71%	7.09%

Napomena: intervalne ocene smo dobili primenom metode replikacije na osnovu 10000 ponavljanja.

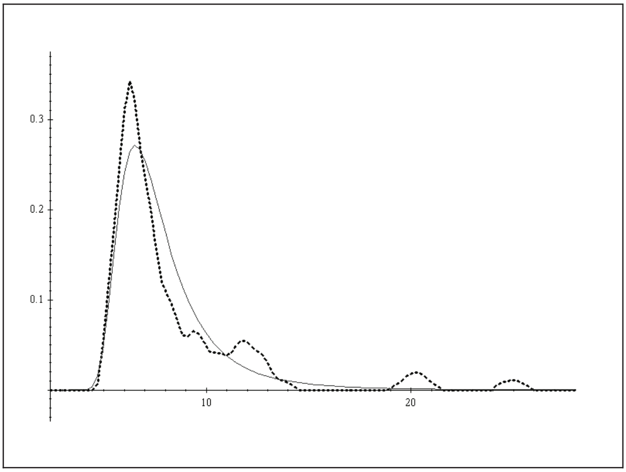
Grafik 6.4. Funkcija srednjeg prekoračenja (INTEL)



Grafik 6.5a. Empirijska raspodela maksimuma negativne stope prinosa akcija kompanije INTEL (isprekidana linija) i ocenjena Frešeova gustina raspodele (puna linija) na osnovu 127 podataka



Grafik 6.5b. Empirijska raspodela maksimuma negativne stope prinosa akcija kompanije INTEL (isprekidana linija) i ocenjena Frešeova gustina raspodele (puna linija) na osnovu 71 podataka



Ekonometrijska ocena parametra vrednosti pri riziku sugeriše da posedovanje akcija kompanije INTEL u vrednosti od, na primer 10000 dolara, nosi sa sobom potencijalni rizik od gubitka koji sa verovatnoćom 95% nije veći od oko 290 dolara u periodu od jednog dana. Taj mogući gubitak je primenom teorije ekstremnih vrednosti procenjen na oko 460 dolara. Uz verovatnoću 99% potencijalni maksimalni gubici se kreću u intervalu od oko 431 dolara (ekonometrijska ocena) do oko 690 dolara (ocena po teoriji ekstremnih vrednosti).

6.3. Ocena parametra vrednosti pri riziku dnevnog prinosa tržišnog indeksa NASDAQ

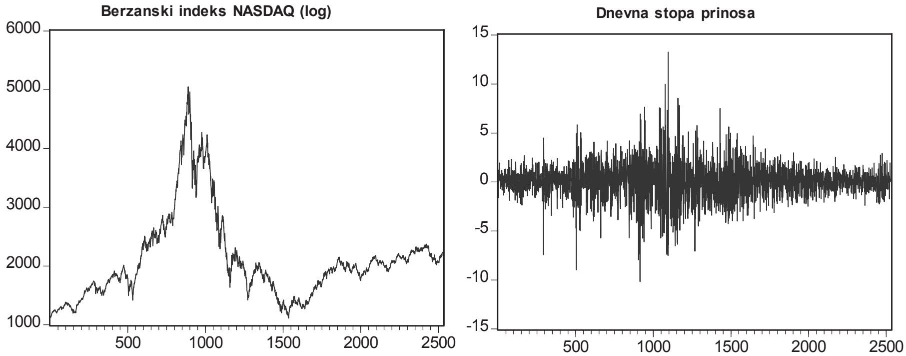
Kompozitni tržišni indeks NASDAQ obuhvata indekse cena akcija oko 3000 kompanija, od kojih mnoge pripadaju oblasti visoke tehnologije. Prethodno analizirane cene akcija kompanija CISCO i INTEL se koriste prilikom obrazovanja indeksa NASDAQ. Prirodno je očekivati da dnevna stopa prinosa široko definisanog tržišnog indeksa (grafik 6.6) poseduje visok stepen volatilnosti i raspodelu sa teškim repovima. To potvrđuju vrednosti elementarnih test-statistika koje su date u tabeli 6.7. Na osnovu histograma i Q-Q dijagrama (grafik 6.7) takođe zaključujemo da se empirijska raspodela stope prinosa indeksa NASDAQ ne može precizno aproksimirati normalnom raspodelom. Potrebno je naglasiti da je empirijska raspodela simetrična, ali da do odstupanja od normalnosti dolazi zbog visokog koeficijenta spljoštenosti.[2]

Tabela 6.7. Osnovne deskriptivne statistike dnevne stope prinosa indeksa NASDAQ

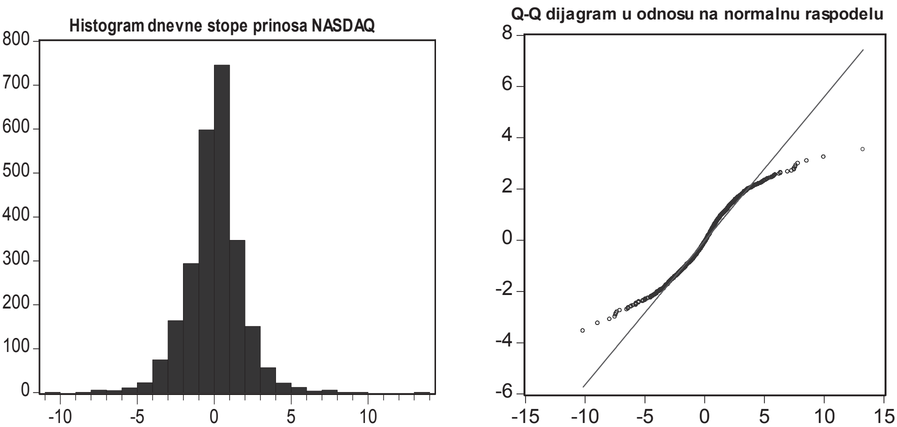
Standardna devijacija	Koeficijent asimetrije	Koeficijent spljoštenosti	JB	$Q^2(10)$	$Q^2(30)$	ARCH(10)	ARCH(30)
1.82	0.041	6.88	1585(0.0)	1209.4(0.0)	2551.2(0.0)	423.9(0.0)	497.8(0.0)

2 Budući da indeks NASDAQ predstavlja meru prosečnog kretanja na tržištu, realno je očekivati da raspodela njegove stope prinosa bude više simetrična od raspodele prinosa pojedinih komponenti tog indeksa.

Grafik 6.6. Tržišni indeks NASDAQ i dnevna stopa prinosa



Grafik 6.7. Stepen saglasnosti empirijske raspodele dnevne stope prinosa indeksa NASDAQ sa normalnom raspodelom



Da bismo dobili ekonometrijsku ocenu parametra vrednosti pri riziku razmatrali smo više varijanti GARCH modela pod pretpostavkom da njihova slučajna greška poseduje normalnu i *t*-raspodelu. Imajući u vidu kvalitet ocenjenih modela, u daljoj analizi smo koristili ocene iz sledeće dve specifikacije:

1. GARCH(3,1) model sa normalnom raspodelom i
2. APARCH(1,1) model sa normalnom raspodelom.

Red standardnog GARCH modela je veći nego što je to bio slučaj prilikom modeliranja volatilnosti prinosa akcija pojedinačnih kompanija. Time se potvrđuje naše očekivanje o postojanju relativno složene vremenske strukture volatilnosti ovog kompozitnog indeksa.

U tabeli 6.8 smo izložili dobijene rezultate. Prema datim modelima smo prvo prognozirali buduće stope prinosa i volatilnosti za jedan dan unapred, a potom smo ocenili parametar vrednosti pri riziku. Dobijene ocene za jedan dan unapred i verovatnoće 95% i 99% su date u tabeli 6.9. Primećujemo da su ocene iz dva modela gotovo identične.

Tabela 6.8. Ocene parametara GARCH i APARCH modela stope prinosa indeksa NASDAQ

Ocene parametara	GARCH (3,1) sa normalnom raspodelom	APARCH(1,1) sa normalnom raspodelom
α_0	0.008 (2.53)	0.015 (2.97)
α_1	0.038 (2.21)	0.066 (4.22)
α_2	0.145 (5.49)	-
α_3	-0.131 (-6.02)	-
β_1	0.945 (106.83)	0.927 (69.30)
ω	-	0.378 (2.26)
δ	-	1.735 (6.43)
Testovi specifikacije	GARCH (3,1) sa normalnom raspodelom	APARCH(1,1) sa normalnom raspodelom
Koeficijent asimetrije	-0.18	-0.25
Koeficijent spljoštenosti	3.59	3.71
JB	49.76	79.84
$Q^2(30)$	17.12(0.97)	27.03(0.62)
ARCH(10)	4.85(0.90)	14.16(0.16)

Napomene: U jednačinama srednje vrednosti nema ARMA komponenti. U zagradama ispod ocena parametara nalaze se odgovarajući t-odnosi. U zagradama pored vrednosti test-statistika su navedeni korespondirajući *p*-odnosi. Parametri modela su ocenjeni primenom BHHH algoritma (Hamilton, 1994). Negativna ocena parametra α_3 u GARCH(3,1) modelu ne dovodi u pitanje njegovu relevantnost. U opštem slučaju, uslov nenegativnosti volatiliteta kod GARCH(m,1) modela nije narušen samo zato što su neki od parametara $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ negativni (videti detaljnije u Nelson and Cao, 1992).

Tabela 6.9. Ekonometrijska ocena parametra vrednosti pri riziku za period od jednog dana (stopa prinosa indeksa NASDAQ)

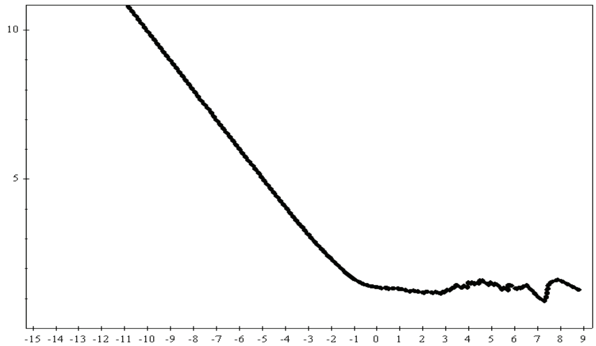
Model	GARCH (3,1) sa normalnom raspodelom	APARCH(1,1) sa normalnom raspodelom
Prognoza prinosa $\hat{y}_n(1)$	0.0842	0.0409
Prognoza uslovne varijanse $\hat{\sigma}_n^2(1)$	0.8251	0.8697
$V\hat{a}R(1,0.95)$	1.41%	1.50%
$V\hat{a}R(1,0.99)$	2.03%	2.13%

Uz verovatnoću 95% možemo očekivati da je maksimalni gubitak zbog posedovanja akcija u vrednosti od 10000 dolara na tržištu koje opisuje indeks NASDAQ oko 145 dolara u periodu od jednog dana. Ovaj iznos je daleko manji od procenjenog gubitka zbog posedovanja pojedinačnih akcija kompanija CISCO i NASDAQ. Takav nalaz je očekivan uzimajući u obzir diverzifikaciju rizika.

Kako su repovi empirijske raspodele stope prinosa indeksa NASDAQ teži od repova normalne raspodele, ocenu parametra vrednosti pri riziku dobićemo i primenom teorije ekstremnih vrednosti. Vrednost praga smo izabrali na osnovu grafičkog prikaza funkcije srednjeg prekoračenja (grafik 6.8). Ova funkcija pokazuje tendenciju linearnog rasta počev od vrednosti u intervalu $[3.5;4]$. Zato smo skup ekstremnih događaja definisali za oba praga: 3.5 i 4. Na taj način smo obrazovali skupove redom obima 71 i 47. Na osnovu 71 podataka primenom metoda maksimalne verodostojnosti dobili smo sledeće ocene parametara Frešeove raspodele: $\hat{\gamma}=0.176,\ \hat{\mu}=4.274,\ \hat{\beta}=0.751$. Ukoliko se koristi uzorak obima 47, tada su odgovarajuće ocene: $\hat{\gamma}=0.244,\ \hat{\mu}=4.751,\ \hat{\beta}=1.019$.

Parametar γ je u oba slučaja značajno različit od nule (p-vrednost odgovarajućeg testa količnika verodostojnosti je nula). Time se potvrđuje opravdanost korišćenja Frešeove raspodele. Visok stepen objašnjenosti empirijske funkcije raspodele maksimuma negativne stope prinosa Frešeovom raspodelom potvrđuju i odgovarajući grafički prikazi (grafici 6.9a i 6.9b). Dodatno, grafici 6.10a i 6.10b predstavljaju Q-Q dijagrame na kojima su ucrtani parovi empirijskih kvantila i onih koje sugerišu ocenjene Frešeove raspodele. Budući da se parovi kvantila za obe ocenjene funkcije nalaze na putanji koja se može aproksimirati pravom, i na osnovu ovog pokazatelja zaključujemo da je maksimum negativne stope prinosa indeksa NASDAQ solidno modeliran.

Grafik 6.8. Funkcija srednjeg prekoračenja (NASDAQ)



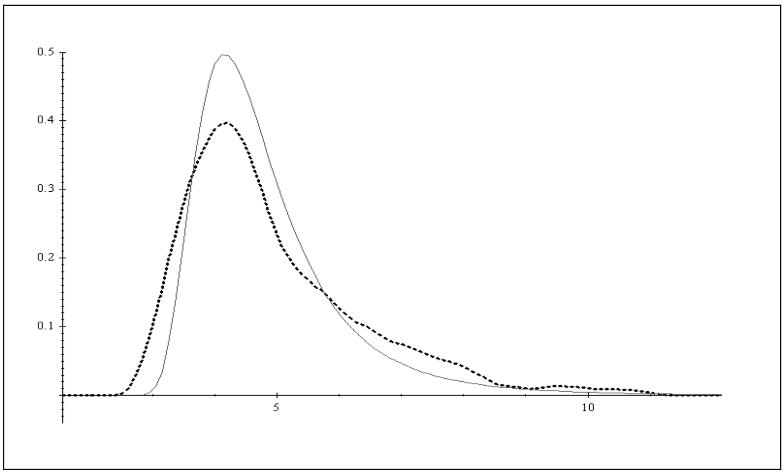
Koristeći ocenjene parametre Frešeove raspodele dobili smo sledeće ocene parametra vrednosti pri riziku: oko 3.10% za verovatnoću 95% i oko 4.45% za verovatnoću 99%. Svi rezultati su sumirani u tabeli 6.10. Ocene po teoriji ekstremnih vrednosti su veće od ekonometrijskih ocena. To znači da i u slučaju analize kompozitnog berzanskog indeksa postoji mogućnost za potcenjivanjem potencijalnog gubitka ukoliko se zanemare ekstremna dešavanja. Sa druge strane, ocena parametra vrednosti pri riziku po teoriji ekstremnih vrednosti je manja od korespondirajućih ocena za dnevne prinose analiziranih pojedinačnih kompanija CISCO i INTEL.

U radu Bradley and Taqqu (2003) modelirana je dnevna stopa prinosa indeksa NASDAQ u periodu: februar 1971 - februar 2001 (7570 podataka). Za verovatnoću 99% dobijena je ocena parametra vrednosti pri priziku 6.59% na osnovu korišćenja normalne raspodele i 8.19% primenom teorije ekstremnih vrednosti. Pri tome, ocene parametara Frešeove raspodele su $\hat{\gamma}=0.189,\ \hat{\beta}=0.915$. Kako smo već naveli, zbog korišćenja različitih uzoraka ocene parametra vrednosti pri riziku nisu uporedive. Međutim, primetno je da se i u ovom istraživanju primenom teorije ekstremnih vrednosti dobija znatno veća ocena parametra vrednosti pri riziku nego na osnovu ekonometrijske analize.

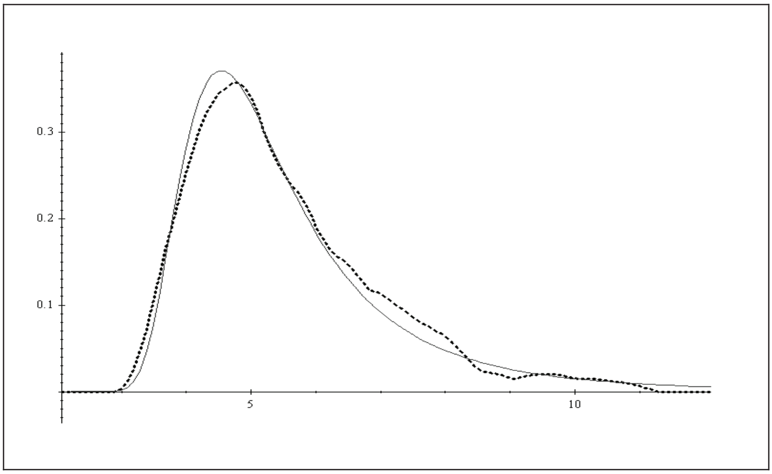
Tabela 6.10. Ocena parametra vrednosti pri riziku primenom teorije ekstremnih vrednosti za period od jednog dana (stopa prinosa indeksa NASDAQ)

Broj prekoračenja praga	71	47
Ocene parametara	$\hat{\gamma}=0.176,\ \hat{\mu}=4.274,\ \hat{\beta}=0.751$	$\hat{\gamma}=0.244,\ \hat{\mu}=4.751,\ \hat{\beta}=1.019$
$V\hat{a}R(1,0.95)$	3.09%	3.11%
$V\hat{a}R(1,0.99)$	4.35%	4.68%

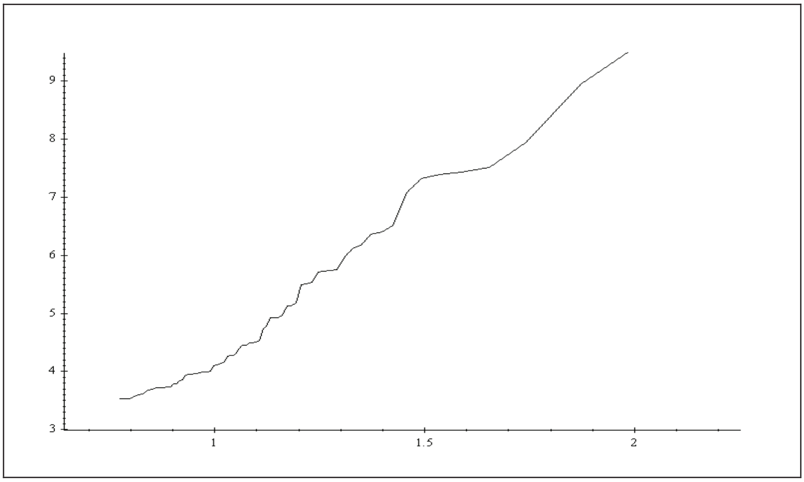
Grafik 6.9a. Empirijska raspodela maksimuma negativne stope prinosa indeksa NASDAQ (isprekidana linija) i ocenjena Frešeova gustina (puna linija) na osnovu 71 podatka



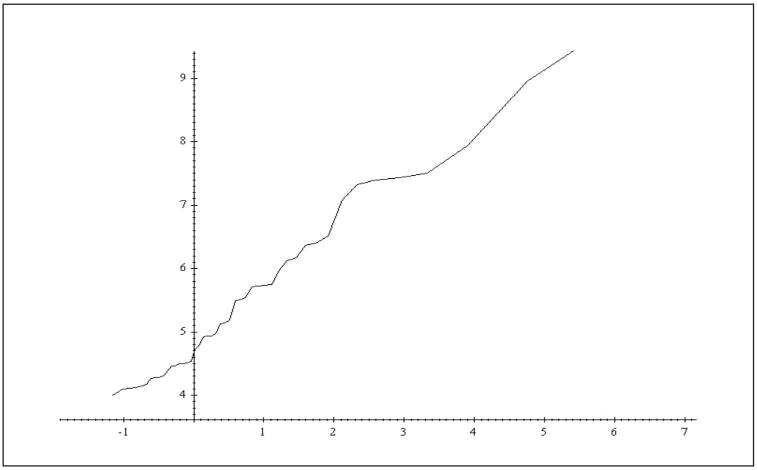
Grafik 6.9b. Empirijska raspodela maksimuma negativne stope prinosa indeksa NASDAQ (isprekidana linija) i ocenjena Frešeova gustina raspodele (puna linija) na osnovu 47 podataka



Grafik 6.10a. Q-Q dijagram u odnosu na Frešeovu raspodelu sa grafika 6.9a



Grafik 6.10b. Q-Q dijagram u odnosu na Frešeovu raspodelu sa grafika 6.9b



7. Zaključak

U radu smo razmatrali različite aspekte ocenjivanja parametra vrednosti pri riziku. Posmatrali smo kretanje dnevnih prinosa cena akcija kompanija CISCO i INTEL, kao i tržišnog indeksa NASDAQ, u periodu: septembar 1996 – septembar 2006. godine. Koristili smo metode kojima se obuhvataju svojstva vremenski promenljivog varijabiliteta i teških repova empirijske raspodele prinosa.

Ukazali smo na to da rezultat ekonometrijskog ocenjivanja (pod pretpostavkom da su zadovoljene sve pretpostavke za primenu) može zavisiti od izabranog GARCH modela. Zato je neophodno da detaljna analiza specifikacije potencijalnih modela predstavlja prvi korak u izvođenju ocene parametra vrednosti pri riziku.

Ocenjivanje na osnovu primene teorije ekstremnih vrednosti zasniva se na modeliranju repa empirijske raspodele. Jedan od ključnih elemenata u ovom pristupu jeste izbor praga, na osnovu koga se određuje skup ekstremnih vrednosti. Taj skup je predmet dalje statističke analize. Nepostojanje egzaktnog metoda za izbor praga smanjuje pouzdanost dobijenih rezultata.

Često se kao nedostatak pristupa teorije ekstremnih vrednosti navodi zanemarivanje postojanja autokorelacije i heteroskedastičnosti u podacima.

Kada smo iz jedne od razmatranih serija eliminisali ove uticaje i potom ponovili postupak ocenjivanja, dobijeni rezultati su se neznatno promenili.

Konačno, ocena parametra vrednosti pri riziku po teoriji ekstremnih vrednosti je u svakom od razmatranih slučajeva veća od odgovarajuće ekonometrijske ocene. To nije iznenađenje, imajući u vidu značajan broj ekstremnih promena u kretanju posmatranih vremenskih serija. S obzirom na to da ne postoji jasno definisan kriterijum za izbor pouzdanijeg metoda ocenjivanja parametra vrednosti pri riziku, smatramo da u praktičnom radu treba uzeti u obzir rezultate oba pristupa. Na taj način sagledavamo interval unutar koga se nalazi stvarni parametar vrednosti pri riziku.

LITERATURA

Balkema, A. A. and de Haan, L. (1974), "Residual life time at great age", *Annals of Probability* 2, 792-804.

Beirlant, J. and Teugels, J. L. (1989), "Asymptotic normality of Hill's estimator", in *Lecture Notes in Statistics 51* (eds. J. Husler and R.D. Reiss), Springer-Verlag.

Beirlant, J., Teugels, J. L. and Vynckier, P. (1996), *Practical Analysis of Extreme Values*, Leuven University Press, Leuven.

Bollerslev, T. (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics 31*, 34-105.

Bollerslev, T., Engle, R. F. and Nelson, D. B. (1994), "ARCH models", in *Handbook of Econometrics, Vol. 4* (eds. R.F. Engle and D.L. McFadden), Elsevier, North-Holland, Amsterdam.

Bradley, B. O. and Taqqu, M. S. (2003), "Financial risk and heavy tails", in *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance* (ed. S.T. Rachev), Elsevier, North-Holland, Amsterdam.

Brooks, C., Clare, A. D., Molle, J. W. D., Persand, G. (2005), "A comparison of extreme value theory approaches for determining value at risk", *Journal of Empirical Finance 12*, 339-352.

Deheuvels, P., Haeusler, E. and Mason, D. M. (1988), "Almost sure convergence for the Hill estimator", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 104*, 371-381.

Ding, Z., Granger, C. W. J. and Engle, R. F. (1993), "A long memory property of stock market returns and a new model", *Journal of Empirical Finance 1*, 83-106.

Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (2003), *Modelling Extremal Events*, Springer-Verlag, Berlin, 4th ed.

Fisher, R. A. and Tippet, L. H. C. (1928), "Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 24*, 180-190.

Galambos, J. (1978), *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Wiley, New York.

Gencay, R. and Selcuk, F. (2004), "Extreme value theory and value-at-risk: relative performance in emerging markets", *International Journal of Forecasting* 20, 287-303.

Giot, P. and Laurent, S. (2003), "Value-at-risk for long and short trading positions", *Journal of Applied Econometrics 18*, 641-664.

Gnedenko, B. V. (1943), "Sur la distribution limite de terme maximum d' une serie aleatoire", *Annals of Mathematics*, *44*, 423-453.

Hamilton, J. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton.

Hill, B. M. (1975), "A simple general approach to inference about the tail of a distribution", *Annals of Statistics 3*, 1163-1174.

Leadbetter, M. R. (1974), "On extreme values in stationary sequences", *Zeitschrift Feur Wahrscheinl ichkeitstheorie und Verwandte Gebiete 28*, 289-303.

Leadbetter, M. R., Lindgren, G. and Rootzen, H. (1983), *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer-Verlag, New York.

Manganelli, S. and Engle, R. F. (2004), "CAViaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles", *Journal of Business and Economics Statistics 22*, 367-380.

Manganelli, S. and Engle, R. F. (2001), "Value at risk models in finance", European Central Bank, Working Paper No. 75.

McNeil, A. J. and Frey, R. (2000), "Estimation of tail-related risk measures for heteroskedastic financial time series: an extreme value approach", *Journal of Empirical Finance 7*, 271 – 300.

Mladenović, P. (2002), *Ekstremne vrednosti slučajnih nizova*, Matematički fakultet, Beograd.

Nelson, D. B. and Cao, C. Q. (1992), "Inequality constraint in the univaraite GARCH(1,1) model", *Journal of Business and Economic Statistics 10*, 229-235.

Reiss, R. D. and Thomas, M. (2001), *Statistical Analysis of Extreme Values*, Birkhauser, Basel.

RiskMetrics (1996), *Technical Document*, Morgan Guaranty Trust Company of New York.

Smirnov (1949), "Predeljnye zakony dlja chlenov variacionogo rjada", *Trudy Matematicheskogo Instituta im. V.A. Steklova* 25, 1-60.

Teugels, J. L. (1981), "Limit theorems on order statistics", *Annals of Probability*, 9, 868-880.

Tsay, R. S. (2005), *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, New Jersey, 2nd ed.

EVIEWS 5 User's Guide (2004), Quantitative Micro Software, CA.