

## 1. Zadatak

Kompanija koja se bavi proizvodnjom nameštaja specijalizovala se u pravljenju fotelja i kauča. Ova kompanija poseduje dve fabrike, jednu u Indiji, drugu u Nišu. Fabrika u Indiji ima dozvoljene dnevne operativne troškove u iznosu od 12000 n.j., i može da proizvede najviše 150 komada nameštaja. Troškovi proizvodnje fotelje u ovoj fabrici iznose 55 n.j. dok su troškovi proizvodnje kauča 80 evra. Kada je reč o fabrici u Nišu njeni dozvoljeni dnevni operativni troškovi iznose 8500 n.j. i fabrički kapaciteti im dozvoljavaju da proizvedu najviše 35 fotelja dnevno. U Nišu proizvodnja jedne fotelje košta fabricu 50 n.j., dok ih kauč košta 75 n.j.. Kompanija ostvaruje profit od 25 n.j. na svakoj prodatoj fotelji i 32 n.j. po prodatom kauču.

- a) Postaviti odgovarajući problem linearnog programiranja pomoću kojeg će fabrika odrediti šta treba da proizvodi kako bi maksimizirala profit.
- b) Pomoću odgovarajućeg softvera rešite taj problem.

**Napomena:** reč je o dve fabrike i svaka ima svoj proizvodni proces koji je nezavisan od druge fabrike

### Rešenje zadatka 1.

Promenljive će predstavljati broj fotelja i kauča koji proizvodimo u Nišu i Indiji:

$f_I$  - broj fotelja koji proizvodimo u fabrici u Indiji,

$k_I$  - broj kauča koji proizvodimo u fabrici u Indiji,

$f_N$  - broj fotelja koji proizvodimo u fabrici u Nišu,

$k_N$  - broj kauča koji proizvodimo u fabrici u Nišu.

Odgovarajući problem linearnog programiranja je:

$$\begin{aligned}(\max) z &= 25f_I + 32k_I + 25f_N + 32k_N \\ f_I + k_I &\leq 150 \\ 55f_I + 80k_I &\leq 12000 \\ f_N &\leq 35 \\ 50f_N + 75k_N &\leq 8500 \\ f_I, k_I, f_N, k_N &\geq 0\end{aligned}$$

Rešili smo problem i dobili da je optimalni profit fabrike 8555 novčanih jedinica, i to ako se proizvodi na sledeći način:

$$f_I = 0$$

$$k_I = 150$$

$$f_N = 35$$

$$k_N = 90.$$

## 2. Zadatak

Jedna privatna stolarija pravi stolove i stolice. Proces nastajanja stolarije dele u dva dela: proizvodnju, i proces farbanja i zaštite drveta, kojim se bave odvojeni timovi. Kada bi radnici u proizvodnji proizvodili samo stolove mogli bi da naprave 5 komada dnevno. Sa druge strane kada bi proizvodili samo stolice proizvodni kapaciteti su im takvi da bi bili u stanju da naprave 15 stolica dnevno. Sa druge strane, radnici koji se bavi farbanjem u stanju su da ofarbaju 25 stolova dnevno ako bi se samo time bavili ili 40 stolica ako bi samo to radili u toku jednog radnog dana. Pri tome, očekuje se da se na dnevnom nivou proizvede makar jedan komplet koji čine sto i četiri stolice. Profit stolarije je 10000 dinara po proizvedenom stolu kao i 4000 dinara po stolici. Postavite problem linearnog programiranja pomoću kojeg bi ova mala stolarija odredila svoj optimalni dnevni plan proizvodnje.

## R e š e n j e z a d a t k a 2

Može se desiti da vam se, na prvi pogled, učini da u ovom zadatku postoji manjak informacija i da je zadatak nemoguće rešiti. To, naravno, nije slučaj. Ključ je, kao i do sad, u tome da se ispravno odredi šta predstavljaju naše promenljive. Nakon toga, ako to ispravno odaberemo, ograničenja će se prirodno nametnuti. Pošto je neophodno odrediti optimalni dnevni plan, bitno je da saznamo koliko, na dnevnom nivou, proizvodimo. Zbog toga naše promenljive moraju biti:

$x_1$  - broj stolova koje stolarija dnevno proizvodi,

$x_2$  - broj stolica koje stolarija dnevno proizvodi.

Problem linearnog programiranja pomoću kojeg stolarija određuje svoj optimalni dnevni profit izgleda ovako:

$$\begin{aligned}(\max)z &= 10000x_1 + 4000x_2 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{15}x_2 &\leq 1 \\ \frac{1}{25}x_1 + \frac{1}{40}x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Proanalizirajmo ograničenja. Poslednja dva su jasna, neophodan je komplet od jednog stola i četiri stolice. Kada je reč o prvom ograničenju, podatak koji imamo je koliko stolova i stolica radnici mogu da proizvedu ako rade samo na jednom od ta dva proizvoda. Nama je potrebno koliko vremena utroše po jednom komadu jer smo  $x_1$  i  $x_2$  definisali kao broj stolova i stolica koje proizvedemo dnevno. Ograničeni smo odozgo sa 1 jer posmatramo proizvodnju na dnevnom nivou. Razlomke možemo da izgubimo množenjem prve nejdnakosti sa 15, druge sa 200 i dobijamo problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned}(\max)z &= 10000x_1 + 4000x_2 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 15 \\ 8x_1 + 5x_2 &\leq 200 \\ x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Rešenje zadatka nam govori da pri optimalnom dnevnom planu proizvodnje fabrika ostvaruje profit od 58000 dinara i to kada proizvodi jedan sto i dvanaest stolica dnevno. Pored toga, vrednosti dodatnih i dualnih promenljivih su:

$$x_3 = 0, x_4 = 132, x_5 = 0, x_6 = 0;$$
$$y_1 = 4000, y_2 = 0, y_3 = 2000, y_4 = 0.$$

Probajte da date odgovor na sledeća pitanja. Šta možemo da zaključimo iz ovih vrednosti? Da li sve promenljive imaju logično ekonomsko značenje ili ima promenljivih koje nam nisu ni bitne?

### 3. Zadatak

Firma „Digital“ proizvodi dva modela radarskih uređaja koje koristi policija za praćenje brzine automobila. Model radarskog uređaja sa oznakom „Rad-A“ ima tačnost praćenja od plus-minus jedan kilometar po satu, a radarski uređaj sa oznakom „Rad-B“ ima tačnost praćenja od plus-minus tri kilometra po satu.

Firma „Digital“ za naredni mesec od Ministarstva policije ima porudžbine od 300 komada modela „Rad-A“, i 350 komada modela „Rad-B“. Sve elektronske komponente za oba modela, firma „Digital“ kupuje, a plastična kućišta se proizvode u proizvodnom pogonu firme „Digital“. Za svaki komad modela „Rad-A“ potrebno je 4 minuta za livenje kućišta i 6 minuta za montažu, a za svaki komad modela „Rad-B“ potrebno je 3 minuta za livenje kućišta i 8 minuta za montažu. Troškovi proizvodnje po komadu za model „Rad-A“ iznose 100€, a za model „Rad-B“ iznose 60€. Firma „Digital“ u narednom mesecu ima na raspolaganju 2400 minuta za livenje kućišta i 4300 minuta za montažu radarskih uređaja. U zavisnosti od tražnje za radarskim uređajima od strane Ministarstva policije i raspoloživog vremena, firma „Digital“ povremeno kupuje jedan ili oba modela radarskih uređaja od drugih proizvođača kako bi u potpunosti ispunila porudžbine Ministarstva policije. Troškovi kupovine za model „Rad-A“ su 140€, a za model „Rad-B“ su 90€. Menadžment firme „Digital“ mora da ispuni zahteve porudžbine od strane Ministarstva policije, a pri tome neophodno je da ima minimalne troškove.

Definisati zadatak linearnog programiranja, kojim bi se menadžmentu firme „Digital“ omogućilo donošenje ispravne poslovne odluke.

### Rešenje zadatka 3

$$\begin{aligned} \min z &= 100 \cdot x_1 + 60x_2 + 140x_3 + 90x_4 \\ x_1 &+ x_3 && \geq 300 \\ x_2 &+ x_4 && \geq 350 \\ \text{livenje} & 4x_1 + 3x_2 && \leq 2400 \\ \text{montaza} & 6x_1 + 8x_2 && \leq 4300 \end{aligned}$$

$x_1$  – broj radara tipa Rad – A koji se sklapa

$x_2$  – broj radara tipa Rad – B koji se sklapa

$x_3$  – broj radara tipa Rad – A koji se kupuje

$x_4$  – broj radara tipa Rad – B koji se kupuje

#### 4. Zadatak

Firma „Invest“ bavi se upravljanjem sredstava kompanija i pojedinačnih klijenata. Pri tome, neophodno je da strategija investiranja bude prilagođena zahtevima svakog klijenta. Za novog klijenta „Invest“ je ovlašćen da investira 1.000.000€ na tržištu akcija i tržištu novca. „Invest“ raspolaže informacijama da je godišnji prinos na tržištu akcija 10% na uloženu jedinicu sredstava, a 5% je godišnji prinos na tržištu novca. Takođe, „Invest“ predočava klijentu da je indeks rizika 12 na uloženu jedinicu sredstava u akcije, a indeks rizika 5 na uloženu jedinicu sredstava na tržištu novca. Veći indeks rizika akcijskog fonda pokazuje da su rizičnije investicije u akcije. Prosečan indeks rizika je 10 po investiranoj jedinici sredstava.

Na osnovu dobijenih informacija od firme „Invest“, klijent zahteva da godišnji prinos sredstava od investiranja bude najmanje 70.000€, i da se investira najmanje 200.000€ na tržištu novca. Klijent posebno zahteva od „Invest-a“ da rizik investiranja sredstava bude minimalan.



#### Rešenje zadatka 4

minimiziranje rizika

$$\min z = 12x_1 + 5x_2$$

investirana sredstva

$$x_1 + x_2 \leq 1000000$$

prinos

$$10\%x_1 + 5\%x_2 \geq 70000$$

inv. na trziste novca

$$x_2 \geq 200000$$

$x_1$  – sredstva investirana na trzistu akcija

$x_2$  – sredstva investirana na trzistu novca

## 5. Zadatak

Firma „Invest“ bavi se upravljanjem sredstava kompanija i pojedinačnih klijenata. Pri tome, neophodno je da strategija investiranja bude prilagođena zahtevima svakog klijenta. Za novog klijenta „Invest“ je ovlašćen da investira 1.000.000€ na tržištu akcija i tržištu novca. „Invest“ raspolaže informacijama da je godišnji prinos na tržištu akcija 10% na uloženu jedinicu sredstava, a 5% je godišnji prinos na tržištu novca. Takođe, „Invest“ predočava klijentu da je indeks rizika 12 na uloženu jedinicu sredstava u akcije, a indeks rizika 5 na uloženu jedinicu sredstava na tržištu novca. Veći indeks rizika akcijskog fonda pokazuje da su rizičnije investicije u akcije. Prosečan indeks rizika je 10 po investiranoj jedinici sredstava.

Na osnovu dobijenih informacija od firme „Invest“, klijent zahteva da se investira najmanje 200.000€ na tržištu akcija. Klijent posebno zahteva od „Invest-a“ da godišnji prinos na uložena sredstav bude maksimalan.

### Rešenje zadatka 5

maksimiziranje prinosa

$$\max z = 10\% x_1 + 5\% x_2$$

investirana sredstva

$$x_1 + x_2 \leq 1000000$$

inv. na trziste novca

$$x_2 \geq 200000$$

$x_1$  – sredstva investirana na trzistu akcija

$x_2$  – sredstva investirana na trzistu novca

## 6. zadatak

Dino i Vlada poseduju 100 hektara zemljišta. Na ovoj površini uzgajaju krompir, šećernu repu, šargarepu i rotkvice. Ostvarenja iz prethodne godine prikazana su sledećom tabelom:

	Krompir	Repa	Rotkvice	Šargarepa
Zasađena površina (u ha)	25	20	30	25
Prinos u tonama po hektaru	10	8	9	12
Prodajna cena (u RSD po toni)	100	125	150	135

Prodajne cene i troškovi nisu se menjali u odnosu na prošlu godinu. Kada je o troškovima reč naši zemljoposednici su bili veoma savesni i sačuvali su detaljne informacije o svim varijabilnim troškovima po hektaru zemljišta (pretpostavimo da fiksnih troškova nema):

Varijabilni troškovi (u RSD po hektaru)	Krompir	Repa	Rotkvice	Šargarepa
Đubrivo	30	25	45	40
Seme	15	20	30	25
Pesticidi	25	15	20	25
Plate najamnim radnicima	430	490	505	580

Takođe, poznato je da ove godine, zbog već ugovorenih obaveza oni moraju da proizvedu i na tržište isporuče najmanje 40 tona krompira, 40 tona repe, 36 tona rotkvice i 36 tona šargarepe. Kako su iskusni u svom poslu, oni znaju da na zemljištu na kojem su u prošloj godini bili zasađeni krompir i repa ove godine moraju da posade rotkvice i šargarepu, kao i obrnuto, tamo gde su prošle godine sadili rotkvice i šargarepu ove godine moraju da sade krompir i repu.

a) Ostvarenja iz prethodne godine prikazuju prinose po hektaru u tonama. Prevedite ovaj podatak za svaku kulturu na prihode po hektaru (RSD/ha).

b) Postavite problem linearnog programiranja pomoću kojeg Dino i Vlada mogu da izračunaju optimalni način za sađenje kultura ove godine gde je njihov cilj da maksimiziraju profit. Ovaj problem linearnog programiranja treba da im odgovori koliko će hektara svake kulture biti zasađeno.

## Rešenje zadatka 6.

a)

Krompir – 1000 RSD/ha

Repa – 1000 RSD/ha

Rotkvice – 1350 RSD/ha

Šargarepa – 1620 RSD/ha

b)

$x_1$  – brojhektara pod krompirom

$x_2$  – brojhektara pod repom

$x_3$  – brojhektara pod rotkvicom

$x_4$  – brojhektara pod šargarepom

$$(\max) z = 500x_1 + 450x_2 + 750x_3 + 950x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 5$$

$$x_3 \geq 4$$

$$x_4 \geq 3$$

$$x_3 + x_4 = 45$$

$$x_1 + x_2 = 55$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

## 7. Zadatak

Razočaran dosadašnjom političkom situacijom u zemlji, pojedinac N.N. odlučio je da se, kao nezavisni kandidat, kandiduje na predstojećim predsedničkim izborima. On sada mora da osmisli svoju marketinšku kampanju. Svestan činjenice da će iz budžeta dobiti samo 90.500 evra, on zna da njegova kampanja mora biti efikasna. Njegovi konsultanti procenili su koliko glasova može da dobije u zavisnosti od načina promocije:

- Za svakih sto zalepljenih plakata pored puta, on može da očekuje 2 glasa.
- Procena je da svaka radio reklama takođe donosi 10 glasova.
- Za svaki bilbord pored puta, očekuje se da će kandidat pridobiti 15 glasača.
- Na svakih sto mejlova poslatih registrovanim glasačima, on može da dobije 40 glasova.
- Za svaki televizijski spot u poslednjih meseca dana pre izbora, on može da očekuje 485 glasova.

Troškovi ovih vidova promocije, kao i maksimalne i minimalne „količine“, date su u sledećoj tabeli:

Način promocije	Troškovi (u evrima)	Minimum	Maksimum
<i>Plakat (u stotinama)</i>	25	100	500
<i>Radio</i>	30	40	100
<i>Bilbord</i>	60	50	300
<i>Mejl (u stotinama)</i>	81	500	800
<i>TV spot</i>	1000	3	12

Postavite odgovarajući problem linearnog programiranja pomoću kojeg će nezavisni politički kandidat da isplanira kako da optimalno potroši novac na svoju marketinšku kampanju tako da **maksimizira broj dobijenih glasova**. Obavezno **definišite vaše promenljive**, da bude jasno šta one predstavljaju.

### Rešenje zadatka 7

$x_1$  – broj zalepljenih plakata (u stotinama)

$x_2$  – broj radio reklama

$x_3$  – broj iznajmljenih bilborda

$x_4$  – broj mejlova (u stotinama)

$x_5$  – broj televizijskih spotova

$$\max z = 2x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 40x_4 + 485x_5$$

$$25x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 81x_4 + 1000x_5 \leq 90500$$

$$x_1 \geq 100,$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_2 \geq 40,$$

$$x_2 \leq 100$$

$$x_3 \geq 50,$$

$$x_3 \leq 300$$

$$x_4 \geq 500,$$

$$x_4 \leq 800$$

$$x_5 \geq 3,$$

$$x_5 \leq 12$$