Dinamički model optimalnog ekonomskog rasta sa konačnim vremenskim periodom

- dinamički model optimalnog ekonomskog rasta kroz T diskretnih vremenskih perioda, gde je :

  za svaki $t = 0,1,...,T-1$

  $c = (c_t)$ - vektor potrošnje;

  za svaki $t = 0,1,...,T-1$

  $k = (k_t)$ - vektor kapitala;

  za svaki $t = 0,1,...,T-1$

  $F(k_t)$ - ukupna ponuda roba na kraju perioda t, i sastoji se od ostvarene proizvodnje u tekućem periodu i neiskorišćenog kapitala u periodu t;

  $v(k_T)$ - vrednost preostalog kapitala (zaliha) na kraju perioda posmatranja;

  β^{t+1} - diskontni faktor na tekući vremenski period (period posmatranja) t;

  $u(c_t)$- funkcija korisnosti potrošača.

- **Matematički model ekonomskog rasta** je

$$\max_{c_t} \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t u(c_t) + \beta^T v(k_T) \qquad (1)$$

$$za \ svaki \ t = 0,1,...,T-1, \qquad k_{t+1} = F(k_t) - c_t$$

- funkciju Lagranža za model ekonomskog rasta

$$L = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t u(c_t) + \beta^T v(k_T) - \sum_{t=0}^{T-1} \beta^{t+1} \lambda_{t+1} \left(k_{t+1} - F(k_t) + c_t\right). \qquad (2)$$

- uspostavimo korespodenciju
  - matematičkog modela ekonomskog rasta (izraz (1)), sa modelom dinamičke optimizacije datog izrazom (1),
  - funkcije Lagranža za model ekonomskog rasta (izraz (2)), sa funkcijom Lagranža zadatom izrazom (2),
  - gde je

$$f(a_t, s_t) = u(c_t)$$
$$g(a_t, s_t) = F(k_t) - c_t .$$

- funkcije $u(c_t), F(k_t) \ i \ v(k_T)$ konkavne i rastuće funkcije.

- Primenom uslova stacionarnosti zadatih tvrđenjem Teoreme 1 (potrebni i dovoljni uslovi optimalnosti zadati izrazima (1a) – (1d)) na funkciju Lagranža za model ekonomskog rasta izraz (2), dobija se
    - za svaki $t = 0,1,...,T-1$,
$$D_{c_t} L = u'(c_t) - \beta\lambda_{t+1} = 0, \tag{2a}$$
    - za svaki $t = 0,1,...,T-1$,
$$D_{k_t} L = \beta\lambda_{t+1} \cdot F'(k_t) = \lambda_t, \tag{2b}$$
    - za $t = T$,
$$\lambda_T = v'(k_T) \tag{2c}$$
    - za svaki $t = 0,1,...,T-1$,
$$k_{t+1} = F(k_t) - c_t, \tag{2d}$$

- uslovi (2a)-(2d) predstavljaju potrebne i dovoljne uslove optimalnosti modela ekonomskog rasta, odnosno dobija se optimalni vektor potrošnje $c = (c_t)$.

- $u'(c_t)$ - granična korisnost dodatne jedinice potrošnje u vremenskom periodu t.
- $\beta\lambda_{t+1}$ - predstavlja marginalne troškove dodatne potrošnje u periodu t.

- **optimalan plan potrošnje** mora zadovoljiti uslov dat izrazom (a), odnosno u svakom vremenskom periodu t, granična korisnost dodatne jedinice potrošnje $u'(c_t)$ mora biti jednaka marginalnom trošku $\beta\lambda_{t+1}$.

- tranziciona jednačina (2d), daje informacije o izlazu koji može biti **ili potrošnja ili štednja** u svakom od vremenskih perioda t.

- posmatramo vremenski period $t+1$, jednačine date izrazima (2a) i (2b), su
$$u'(c_{t+1}) = \beta\lambda_{t+2}, \text{ i} \tag{2aa}$$
$$\lambda_{t+1} = \beta\lambda_{t+2} \cdot F'(k_{t+1}) \quad . \tag{2bb}$$

- izraz (2bb) predstavlja doprinos jedinice kapitala u vremenskom periodu $t+1$ na povećanje proizvodnje u dodatnom iznosu $F'(k_{t+1})$.

- Dodatna proizvodnja $F'(k_{t+1})$ može biti
    - sačuvana (nema potrošnje) za naredni vremenski period, čija bi vrednost u narednom vremenskom periodu bila
$$\beta\lambda_{t+2} \cdot F'(k_{t+1}). \tag{3}$$
    - može biti potrošena, tada bi vrednost bila
$$u'(c_{t+1}) \cdot F'(k_{t+1}), \tag{4}$$

- Na osnovu jednačina datih izrazima (2aa) i (2bb) dobija se da je

$$\lambda_{t+1} = u'\left(c_{t+1}\right)\cdot F'\left(k_{t+1}\right). \qquad (5)$$

- Ako levu i desnu stranu jednačine date izrazom (5) pomnožimo sa β, dobija se

$$\beta\lambda_{t+1} = \beta u'\left(c_{t+1}\right)\cdot F'\left(k_{t+1}\right). \qquad (6)$$

- na osnovu jednačine (2a), $\beta\lambda_{t+1} = u'\left(c_t\right)$, i jednačine (6), $\beta\lambda_{t+1} = \beta u'\left(c_{t+1}\right)\cdot F'\left(k_{t+1}\right)$ dobija se da je

$$u'\left(c_t\right) = \beta u'\left(c_{t+1}\right)\cdot F'\left(k_{t+1}\right), \qquad (7)$$

što predstavlja ***Eulerovu*** jednačinu.

- Leva strana jednačine (7) predstavlja marginalnu korisnost potrošnje u vremenskom periodu t,

- Desna strana jednačine (7) predstavlja marginalne troškove.

- Marginalni troškovi su izraženi preko diskontovane vrednosti na jedan period granične korisnosti potencijalne potrošnje koje se odričemo.

- Ako levu i desnu stranu Eulerove jednačine (7) podelimo sa $\beta u'\left(c_{t+1}\right)$, dobija se

$$\frac{u'\left(c_t\right)}{\beta u'\left(c_{t+1}\right)} = F'\left(k_{t+1}\right) \qquad (8)$$

- Leva strana jednačine date izrazom (8) predstavlja, između dva vremenska perioda t i $t+1$, **marginalnu stopu supstitucije potrošnje**,

- desna strana jednačine date izrazom (8) predstavlja marginalnu stopu proizvodnje koja meri transformaciju dodatne jedinice kapitala u dodatnu jedinicu izlaza.

- ako od leve i desne strane Eulerove jednačine (7) oduzmemo $u'\left(c_{t+1}\right)$, dobija se

$$u'\left(c_t\right) - u'\left(c_{t+1}\right) = \beta u'\left(c_{t+1}\right)\cdot F'\left(k_{t+1}\right) - u'\left(c_{t+1}\right),$$

sređivanjem dobija se

$$u'\left(c_t\right) - u'\left(c_{t+1}\right) = \left(\beta\cdot F'\left(k_{t+1}\right) - 1\right)u'\left(c_{t+1}\right) \qquad (9)$$

ili

$$u'\left(c_{t+1}\right) - u'\left(c_t\right) = \left(1 - \beta\cdot F'\left(k_{t+1}\right)\right)u'\left(c_{t+1}\right) \qquad (9a)$$

- na osnovu izraza (9a) ili (9) - odnos potrošnje između dva vremenska perioda t i $t+1$,

$$c_{t+1} > c_t \quad akko \quad 1-\beta\cdot F^{'}\left(k_{t+1}\right) > 0,\ tj.$$
$$-\beta\cdot F^{'}\left(k_{t+1}\right) > -1, \tag{10a}$$
$$\beta\cdot F^{'}\left(k_{t+1}\right) < 1$$

$$c_{t+1} = c_t \quad akko \quad 1-\beta\cdot F^{'}\left(k_{t+1}\right) = 0,\ tj.$$
$$-\beta\cdot F^{'}\left(k_{t+1}\right) = -1, \tag{10b}$$
$$\beta\cdot F^{'}\left(k_{t+1}\right) = 1$$

$$c_{t+1} < c_t \quad akko \quad 1-\beta\cdot F^{'}\left(k_{t+1}\right) < 0,\ tj.$$
$$-\beta\cdot F^{'}\left(k_{t+1}\right) < -1, \tag{10c}$$
$$\beta\cdot F^{'}\left(k_{t+1}\right) > 1$$

- **komentar**

Jednačina Eulera data izrazom (7) definiše relativnu potrošnju između uzastopnih vremenskih perioda. Stvarni nivo optimalne potrošnje $c=\left(c_t\right)$ za svaki $t=0,1,...,T-1$ određen je iznosom početnog kapitala k_0 i uslovom zadatim izrazom (2c) koji predstavlja cenu u senci λ_T završnog perioda $t=T$, koja je jednaka marginalnoj vrednosti završnih zaliha $v^{'}\left(k_T\right)$.

Matematičkim model ekonomskog rasta i funkcija Hamiltoniana

- Korespondencija matematičkog modelam ekonomskog rasta (izraz (1)) i modela dinamičke optimizacije primenom funkcije Hamiltoniana (izraz (2))
- Gde je

$$\begin{aligned} f(a_t, s_t) &= u(c_t) \\ g(a_t, s_t) &= F(k_t) - c_t \end{aligned} \tag{11}$$

- funkcija Hamiltoniana za matematički model ekonomskog rasta je oblika

$$H(c_t, k_t, \lambda_{t+1}) = u(c_t) + \beta\lambda_{t+1}(F(k_t) - c_t). \tag{12}$$

- Primenom uslova stacionarnosti zadatih izrazima (3aa) – (3dd) na funkciju Hamiltoniana zadatu izrazom (12), dobija se
  - za svaki $t = 0,1,...,T-1$,

    $$D_{c_t} L = u^{'}(c_t) - \beta\lambda_{t+1} = 0, \tag{12a}$$

  - za svaki $t = 0,1,...,T-1$,

    $$D_{k_t} L = \beta\lambda_{t+1} \cdot F^{'}(k_t) = \lambda_t, \tag{12b}$$

  - za $t = T$,

    $$\lambda_T = v^{'}(k_T) \tag{12c}$$

  - za svaki $t = 0,1,...,T-1$,

    $$k_{t+1} = F(k_t) - c_t, \tag{12d}$$

što predstavlja potrebne i dovoljne uslove optimalnosti modela ekonomskog rasta.