Dinamička optimizacija

- Neophodno je na ekonomske modele primeniti metode optimizacije u vremenu
- Optimizacija ekonomskih modela u vremenskoj dimenziji zahteva dodatnu teorijsku razradu i novu matematičku aparaturu u odnosu na statičke modele optimizacije
- Postoje tri pristupa modeliranju dinamičkog ekonomskog procesa, i to:
  - Prvi pristup, predstavlja klasičan pristup koji se bazira na varijacionome računu
  - Drugi pristup se bazira na dinamičkom programiranju, pri čemu se ekonomski proces posmatra u diskretnim vremenskim trenucima
  - Treći pristup predstavlja dinamička optimizacija koja se bazira na metodu Lagrangea kao oblika statičke optimizacije

Model dinamičke optimizacije sa konačnim vremenskim periodom

- sistem koji modeliramo može biti predstavljen na sledeći način

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & a_0 & & a_1 & & & a_{T-1} & & s_t \\
\underline{s_0} & \rightarrow & \underline{s_1} & \rightarrow & \cdots & \underline{s_{t-1}} & \rightarrow & & \downarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & v(s_t) \\
 & f_0(a_0,s_0) & & f_1(a_1,s_1) & & & f_{T-1}(a_{T-1},s_{T-1}) & &
\end{array}
$$

- u vremenskom periodu $t=0$, polazi se iz početnog stanja s_0, pri čemu donosilac odluke vrši izbor akcije $a_0 \in A_0$.
- na osnovu preduzete akcije i početnog stanja, ostvaruje se efekat $f_0(a_0,s_0)$ i prelazi u novo stanje sistema s_1,
- prelaz iz stanja s_0 u stanje s_1 određen je tranzicionom funkcijom g, tj.

$$s_1 = g_0(a_0,s_0).$$

- u vremenskom periodu t, polazi se iz stanja s_t, i pritom donosilac odluke vrši izbor akcije $a_t \in A_t$
- na osnovu preduzete akcije a_t i stanja s_t, ostvaruje se efekat $f_t(a_t,s_t)$ i prelazi u novo stanje sistema s_{t+1},
- prelaz iz stanja s_t u stanje s_{t+1} određen je tranzicionom jednačinom

$$s_{t+1} = g_t(a_t,s_t).$$

- cilj donosioca odluke je da izabere takav skup akcija a_t za vremenske periode $t = 0,1,2,...,T-1$, koje maksimiziraju sumu vrednosti u svakom od vremenskih perioda $t = 0,1,2,...,T-1$ uvećanu za vrednost $v(s_T)$ u završnom periodu $t = T$,
- suma vrednosti se diskontuje na posmatrani tekući vremenski period,

➢ problem dinamičke optimizacije možemo dati u obliku

$$\max_{a_t \in A_t} \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t f_t(a_t, s_t) + \beta^T v(s_T)$$

$$\text{početno stanje } s_0 \quad \textit{je zadato}, \tag{1}$$

$$s_{t+1} = g_t(a_t, s_t), \quad \textit{za svaki } t = 0,1,...,T-1$$

- postoje dva tipa promenljivih
  - jedan tip promenljivih jesu akcije $a_t \in A_t$ za svaki vremenski period $t = 0,1,2,...,T-1$, preduzete od strane donosioca odluke i predstavljaju kontrolne promenljive
  - drugi tip promenljivih su promenljive stanja $s_t \in R$ koje se određuju indirektno preko tranzicione jednačine

➢ svako od ograničenja problema dinamičke optimizacije (tranziciona jednačina), množimo sa diskontnim faktorom β^{t+1} na tekući vremenski period, i formulišemo model oblika

$$\max_{a_t \in A_t} \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t f_t(a_t, s_t) + \beta^T v(s_T)$$

$$\text{početno stanje } s_0 \quad \textit{je zadato},$$

$$\beta^{t+1}\left(s_{t+1} - g_t(a_t, s_t)\right) = 0, \quad \textit{za svaki } t = 0,1,...,T-1$$

➢ svakom od ograničenja pridružimo po jedan multiplikator Lagranža, možemo definisati funkciju Lagranža oblika

$$L = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t f_t(a_t, s_t) + \beta^T v(s_T) - \sum_{t=0}^{T-1} \beta^{t+1} \lambda_{t+1}\left(s_{t+1} - g_t(a_t, s_t)\right), \tag{2}$$

odnosno,

$$L = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t f_t(a_t, s_t) + \sum_{t=0}^{T-1} \beta^{t+1} \lambda_{t+1} g_t(a_t, s_t) - \sum_{t=0}^{T-1} \beta^{t+1} \lambda_{t+1} s_{t+1} + \beta^T v(s_T) =$$

$$= \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t f_t(a_t, s_t) + \sum_{t=0}^{T-1} \beta^{t+1} \lambda_{t+1} g_t(a_t, s_t) - \sum_{t=1}^{T} \beta^t \lambda_t s_t + \beta^T v(s_T)$$

➢ iz funkcije Lagranža izdvojamo prvi vremenski period $t = 0$ i poslednji vremenski period $t = T$, od preostalih vremenskih perioda, dobija se

$$L = f_0(a_0, s_0) + \beta \lambda_1 g_0(a_0, s_0) + \sum_{t=1}^{T-1} \beta^t f_t(a_t, s_t) + \sum_{t=1}^{T-1} \beta^{t+1} \lambda_{t+1} g_t(a_t, s_t) - \sum_{t=1}^{T-1} \beta^t \lambda_t s_t - \beta^T \lambda_T s_T + \beta^T v(s_T)$$

Sređivanjem izraza dobija se

$$L = f_0(a_0, s_0) + \beta \lambda_1 g_0(a_0, s_0) + \sum_{t=1}^{T-1} \beta^t \cdot \left[f_t(a_t, s_t) + \beta \lambda_{t+1} g_t(a_t, s_t) - \lambda_t s_t \right] - \beta^T \lambda_T s_T + \beta^T v(s_T)$$

- Da bi definisali potrebne i dovoljne uslove optimalnosti modela dinamičke optimizacije koriste se **tvrđenja Lagranžove teoreme i tvrđenja teoreme implicitne funkcije**

Potrebni i dovoljni uslovi optimalnosti modela dinamičke optimizacije

- za svaki vremenski period $t = 0,1,2,...,T-1$ određujemo parcijalne izvode funkcije Lagranža
  - parcijalni izvod funkcije Lagranža po a_t za svaki $t = 0,1,2,...,T-1$ je
    $$D_{a_t} L = \beta^t \left(D_{a_t} f_t\left(a_t, s_t\right) + \beta\lambda_{t+1} D_{a_t} g_t\left(a_t, s_t\right)\right) = 0, \qquad \text{(a)}$$
  - parcijalni izvod funkcije Lagranža po s_t za svaki $t = 0,1,2,...,T-1$ je
    $$D_{s_t} L = \beta^t \left(D_{s_t} f_t\left(a_t, s_t\right) + \beta\lambda_{t+1} D_{s_t} g_t\left(a_t, s_t\right) - \lambda_t\right) = 0, \qquad \text{(b)}$$
  - parcijalni izvod funkcije Lagranža za stanje s_T zadnjeg vremenskog perioda $t = T$ je
    $$D_{s_T} L = \beta^T \left(-\lambda_T + v^{'}\left(s_T\right)\right) = 0 \ . \qquad \text{(c)}$$
  - Skup akcija $a_0, a_1, ..., a_{T-1}$ i i skup stanja $s_1, s_2, ..., s_T$ mora zadovoljiti tranzicione jednačine,
    $$s_{t+1} = g_t\left(a_t, s_t\right), \text{ za svaki } t = 0,1,...,T-1. \qquad \text{(d)}$$

- ako levu i desnu stranu izraza (a) i (b) podelimo sa β^t, a levu i desnu stranu izraza (c) podelimo sa β^T, dobija se

  za svaki $t = 0,1,...,T-1$, $D_{a_t} f_t\left(a_t, s_t\right) + \beta\lambda_{t+1} D_{a_t} g_t\left(a_t, s_t\right) = 0$, (aa)

  za svaki $t = 0,1,...,T-1$, $D_{s_t} f_t\left(a_t, s_t\right) + \beta\lambda_{t+1} D_{s_t} g_t\left(a_t, s_t\right) = \lambda_t$, (bb)

  za $t = T$, $\lambda_T = v^{'}\left(s_T\right)$ (cc)

  za svaki $t = 0,1,...,T-1$, $s_{t+1} = g_t\left(a_t, s_t\right)$. (dd)

- **tvrđenja**
  - Stacionarni uslovi funkcije Lagranža zadati izrazima (aa) - (dd) predstavljaju globalni optimum ako je **funkcija Lagranža konkavna** za svaki a_t i svaki s_t.
  - Ako je funkcija $v\left(s_T\right)$ rastuća funkcija, tada je $\lambda_T \geq 0$.
  - Ako su funkcije $f_t\left(a_t, s_t\right)$ i $g_t\left(a_t, s_t\right)$ rastuće funkcije za svaki s_t, tada je $\lambda_t \geq 0$ za svaki $t = 0,1,...,T-1$.
  - ako su funkcije $f_t\left(a_t, s_t\right)$, $g_t\left(a_t, s_t\right)$ i $v\left(s_T\right)$ konkavne funkcije, tada je funkcija Lagranža konkavna funkcija.

- Prethodna tvrđenja dajemo narednom teoremom

Teorema 1.

Model dinamičke optimizacije sa konačnim vremenskim periodom oblika

$$\begin{aligned}&\max_{a_t \in A_t} \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t f_t(a_t, s_t) + \beta^T v(s_T)\\ &\text{početno stanje } s_0 \quad je\, zadato, \qquad\qquad , \\ &s_{t+1} = g_t(a_t, s_t), \quad za \;\; svaki \; t = 0,1,\ldots,T-1\end{aligned} \tag{1}$$

i pretpostavimo da je

- Skup A_t otvoren skup za svaki vremenski period t;
- Funkcije $f_t(a_t, s_t)$ i $g_t(a_t, s_t)$ su konkavne i rastuće funkcije u svakom od stanja s_t;
- Funkcija $v(s_T)$ je konkavna i rastuća funkcija.
- vektor akcija $(a_0, a_1, \ldots, a_{T-1})$ predstavlja optimalno rešenje modela dinamičke optimizacije zadatog izrazom (1) ako i samo ako postoji jedinstveni vektor Lagranžovih multiplikatora $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_T)$ takav da je

za svaki $t = 0,1,\ldots,T-1$, $D_{a_t} f_t(a_t, s_t) + \beta\lambda_{t+1} D_{a_t} g_t(a_t, s_t) = 0$, (1a)

za svaki $t = 0,1,\ldots,T-1$, $D_{s_t} f_t(a_t, s_t) + \beta\lambda_{t+1} D_{s_t} g_t(a_t, s_t) = \lambda_t$, (1b)

za $t = T$, $\lambda_T = v'(s_T)$ (1c)

za svaki $t = 0,1,\ldots,T-1$, $s_{t+1} = g_t(a_t, s_t)$, (1d)

- Prvi uslov zadat izrazom (1a) razmatra marginalne promene usled preduzete akcije a_t u vremenskom periodu t, i pri tome postoje dva efekta.
  - Jedan efekat predstavlja promenu tekuće vrednosti $D_{a_t} f_t(a_t, s_t)$ u vremenskom periodu t,
  - drugi efekat predstavlja promenu budućeg stanja $D_{a_t} g_t(a_t, s_t)$ u vremenskom periodu/stanju s_{t+1}, koja se vrednuje (meri) Lagrange-ovim multiplikatorom λ_{t+1}

- Diskontovana vrednost na tekući vremenski period $D_{a_t} f_t(a_t, s_t) + \beta\lambda_{t+1} D_{a_t} g_t(a_t, s_t)$ meri ukupan rezultat marginalnih promena usled preduzete akcije a_t.

- Drugi uslov zadat izrazom (1b) razmatra razvoj modela (sistema). Pri tome, Lagranžov multiplikator λ_t predstavlja cene u senci u stanju s_t modela, tako da postoje dva efekta u stanju s_t modela.
    - Jedan efekat predstavlja promenu tekuće vrednosti $D_{s_t} f_t\left(a_t, s_t\right)$ u vremenskom periodu t ,
    - drugi efekat predstavlja promenu budućeg stanja $D_{s_t} g_t\left(a_t, s_t\right)$ u vremenskom periodu/stanju s_{t+1}, koja se vrednuje (meri) sa $\lambda_{t+1} D_{s_t} g_t\left(a_t, s_t\right)$.

- Diskontovana vrednost na tekući vremenski period $D_{s_t} f_t\left(a_t, s_t\right) + \beta \lambda_{t+1} D_{s_t} g_t\left(a_t, s_t\right)$ meri ukupan rezultat marginalnih promena u vremenskom periodu/stanju s_t, što je jednako vrednosti Lagranžovog multiplikatora (cena u senci) u vremenskom periodu/stanju s_t.

- uslov zadat izrazom (1b) zahteva da cene u senci λ_t u svakom vremenskom periodu vrednuju sadašnje i buduće posledice marginalnih promena u stanju s_t

- Treći uslov zadat izrazim (1c) predstavlja uslov da cena u senci λ_T koja nastaje (rezultira) u stanju s_T mora biti jednaka marginalnoj vrednosti $v'\left(s_T\right)$.

- Četvrti uslov zadat izrazom (1d) predstavlja tranzicionu jednačinu.

- Potrebni i dovoljni uslovi zadati izrazoma (1a) – (1d) predstavljaju sistem od $3T$ jednačina sa $3T$ promenljivih, koji treba rešiti da bi se dobilo optimalno rešenje modela dinamičke optimizacije

- Uslov dat izrazom (1c) jeste uslov završnog (konačnog) stanja sistema, i predstavlja takozvani transverzalni (poprečni) uslov.

Uslov nenegativnosti

- U analizi ekonomskih modela jedan od uslova je da i kontrolne promenljive i promenljive stanja moraju zadovoljiti uslov nenegativnosti.
- potrebni uslovi moraju biti modifikovani kako bi bio ispunjen uslov nenegativnosti, što dajemo sledećom posledicom.

Posledica 2. (Uslov nenegativnosti u modelu dinamičke optimizacije sa konačnim vremenskim periodom)

Model dinamičke optimizacije sa konačnim vremenskim periodom oblika

$$\begin{aligned}
&\max_{a_t \in A_t} \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t f_t(a_t, s_t) + \beta^T v(s_T) \\
&\text{početno stanje } s_0 \quad \textit{je zadato}, \qquad (1) \\
&s_{t+1} = g_t(a_t, s_t), \quad \textit{za svaki } t = 0,1,\dots,T-1
\end{aligned}$$

pretpostavimo da je

- Skup A_t otvoren skup za svaki vremenski period t;
- Funkcije $f_t(a_t, s_t)$ i $g_t(a_t, s_t)$ su konkavne po svakoj kontrolnoj promenljivoj a i u svakom stanju s_t, i rastuće funkcije u svakom od stanja s_t;
- Funkcija $v(s_T)$ je konkavna i rastuća funkcija.

- vektor akcija $(a_0, a_1, \dots, a_{T-1})$ predstavlja optimalno rešenje modela dinamičke optimizacije zadatog izrazom (1) ako i samo ako postoji jedinstveni vektor Lagranžovih multiplikatora $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T)$ takav da je

za svaki $t = 0,1,\dots,T-1$, $\quad D_{a_t} f_t(a_t, s_t) + \beta\lambda_{t+1} D_{a_t} g_t(a_t, s_t) = 0$, (1a)

za svaki $a_t \geq 0$ i za svaki $t = 0,1,\dots,T-1$ je

$$\left(D_{a_t} f_t(a_t, s_t) + \beta\lambda_{t+1} D_{a_t} g_t(a_t, s_t)\right) \cdot a_t = 0, \qquad (1aa)$$

za svaki $t = 0,1,\dots,T-1$, $\quad D_{s_t} f_t(a_t, s_t) + \beta\lambda_{t+1} D_{s_t} g_t(a_t, s_t) = \lambda_t$, (1b)

za svaki $s_t \geq 0$ i za svaki $t = 0,1,\dots,T-1$ je

$$\left(D_{s_t} f_t(a_t, s_t) + \beta\lambda_{t+1} D_{s_t} g_t(a_t, s_t) - \lambda_t\right) \cdot s_t = 0, \qquad (1bb)$$

za $t = T$ i $s_T \geq 0$, $\quad \lambda_T \geq v'(s_T)$ $\;i\;$ $\lambda_T s_T = 0$, (1c)

za svaki $t = 0,1,\dots,T-1$, $\quad s_{t+1} = g_t(a_t, s_t)$, (1d)