Princip maksimuma funkcije Hamiltoniana

- Modeliranje ekonomskog sistema može biti definisano pomoću funkcije **Hamiltoniana** za vremenski period t, kao **model dinamičke optimizacije** oblika

$$H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right) = f_t\left(a_t, s_t\right) + \beta\lambda_{t+1} g_t\left(a_t, s_t\right), \qquad (2)$$

- funkcija Hamiltoniana meri (određuje) ukupnu vrednost u tekućem vremenskom periodu

- funkcija Lagranža problema dinamičke optimizacije zadata je izrazom

$$L = f_0\left(a_0, s_0\right) + \beta\lambda_1 g_0\left(a_0, s_0\right) + \sum_{t=1}^{T-1}\beta^t \cdot \left[f_t\left(a_t, s_t\right) + \beta\lambda_{t+1} g_t\left(a_t, s_t\right) - \lambda_t s_t \right] - \beta^T \lambda_T s_T + \beta^T v\left(s_T\right)$$

- funkcija Lagranža za funkciju Hamiltoniana postaje

$$L = H_0\left(a_0, s_0, \lambda_1\right) + \sum_{t=1}^{T-1}\beta^t \left(H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right)\right) - \beta^T \lambda_T s_T + \beta^T v\left(s_T\right). \qquad (3)$$

- pretpostavimo da je
  - Skup A_t otvoren skup za svaki vremenski period t;
  - Funkcije $f_t\left(a_t, s_t\right)$ i $g_t\left(a_t, s_t\right)$ su konkavne i rastuće funkcije u svakom od stanja s_t;
  - Funkcija $v\left(s_T\right)$ je konkavna i rastuća funkcija,

- potrebne uslove optimalnosti modela dinamičke optimizacije zadatog izrazom (2),
  - parcijalne izvode funkcije Lagranža date izrazom (3),
    - po a_t za svaki $t = 0,1,2,...,T-1$ je

$$D_{a_t} L = \beta^t D_{a_t} H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right) = 0, \qquad (3a)$$

    - po s_t za svaki $t = 0,1,2,...,T-1$ je

$$D_{s_t} L = \beta^t\left(D_{s_t} H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right) - \lambda_t\right) = 0, \qquad (3b)$$

    - za stanje s_T zadnjeg vremenskog perioda $t = T$ je

$$D_{s_T} L = \beta^T\left(-\lambda_T + v'\left(s_T\right)\right) = 0. \qquad (3c)$$

    - tranzicione jednačine za svaki $t = 0,1,...,T-1$, tj.

$$s_{t+1} = g_t\left(a_t, s_t\right). \qquad (3d)$$

- ako levu i desnu stranu izraza (3a) i (3b) podelimo sa β^t, a levu i desnu stranu izraza (3c) podelimo sa β^T, dobija se
    - za svaki $t = 0,1,2,...,T-1$,
      $$D_{a_t} L = D_{a_t} H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right) = 0, \tag{3aa}$$
    - za svaki $t = 0,1,2,...,T-1$,
      $$D_{s_t} L = D_{s_t} H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right) = \lambda_t, \tag{3bb}$$
    - za $t = T$,
      $$D_{s_T} L = \lambda_T = v'\left(s_T\right), \tag{3cc}$$
    - za svaki $t = 0,1,...,T-1$,
      $$s_{t+1} = g_t\left(a_t, s_t\right), \tag{3dd}$$

- Parcijalni izvod po a_t (izraz (3aa)) predstavlja traženje ekstremnih vrednosti i optimalnog puta

- ako izbor akcija ograničimo na izbor iz skupa A_t za svaki $t = 0,1,2,...,T-1$, tada izraz (3aa) možemo transformisati u izraz oblika

    - za svaki $t = 0,1,2,...,T-1$,
      $$\max_{a_t \in A_t} H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right). \tag{4}$$

što predstavlja **princip maksimuma**.

- princip maksimuma transformiše problem dinamičke optimizacije u niz problema statičke optimizacije.

- niz problema statičke optimizacije povezan je sa dve međuvremenske jednačine.
    - jedna jednačina predstavlja tranzicionu jednačinu,
    - druga jednačina se koristi za određivanje vrednosti cena u senci λ_t, za svaki $t = 0,1,2,...,T-1$.

Prethodna tvrđenja dajemo sledećom posledicom.

Posledica 2. (Princip maksimuma u modelu dinamičke optimizacije sa konačnim vremenskim periodom)

Model dinamičke optimizacije sa konačnim vremenskim periodom oblika

$$\begin{aligned} &\max_{a_t \in A_t} \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t f_t\left(a_t, s_t\right) + \beta^T v\left(s_T\right) \\ &\text{početno stanje } s_0 \quad je\, zadato, \qquad , \\ &s_{t+1} = g_t\left(a_t, s_t\right), \quad za \;\; svaki \;\; t = 0,1,\ldots,T-1 \end{aligned} \tag{1}$$

i pretpostavimo da je

- Skup A_t otvoren skup za svaki vremenski period t;
- Funkcije $f_t\left(a_t, s_t\right)$ i $g_t\left(a_t, s_t\right)$ su konkavne po svakoj kontrolnoj promenljivoj a i u svakom stanju s_t, i rastuće funkcije u svakom od stanja s_t;
- Funkcija $v\left(s_T\right)$ je konkavna i rastuća funkcija,

➢ vektor akcija $\left(a_0, a_1, \ldots, a_{T-1}\right)$ predstavlja optimalno rešenje modela dinamičke optimizacije zadatog izrazom (1) ako i samo ako je

- za svaki $t = 0,1,2,\ldots,T-1$,
$$\max_{a_t \in A_t} H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right), \tag{4.a}$$
- za svaki $t = 0,1,2,\ldots,T-1$,
$$D_{s_t} H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right) = \lambda_t, \tag{4.b}$$
- za $t = T$,
$$\lambda_T = v^{'}\left(s_T\right), \tag{4.c}$$
- za svaki $t = 0,1,\ldots,T-1$,
$$s_{t+1} = g_t\left(a_t, s_t\right), \tag{4.d}$$

gde je,

$$H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right) = f_t\left(a_t, s_t\right) + \beta\lambda_{t+1} g_t\left(a_t, s_t\right)$$ **Hamiltonian funkcija**.

➢ parcijalni izvod funkcije Hamiltonian po $\beta\lambda_{t+1}$ dobija se

$$g_t\left(a_t, s_t\right) = D_{\beta\lambda_{t+1}} H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right), \tag{5}$$

➢ na osnovu izraza (4.d) i (5) dobija se

$$s_{t+1} = D_{\beta\lambda_{t+1}} H_t\left(a_t, s_t, \lambda_{t+1}\right), \tag{6}$$

- potrebne i dovoljne uslove optimalnosti možemo dati u obliku

$$\begin{array}{ll} za\ \ svaki\ \ t = 0,1,\ldots,T-1, & \max\limits_{a} H, \\ za\ \ svaki\ \ t = 0,1,\ldots,T-1, & s_{t+1} = D_{\beta\lambda_{t+1}} H, \\ za\ \ t = T, & \lambda_T = v' \\ za\ \ svaki\ \ t = 0,1,\ldots,T-1, & \lambda_t = D_s H, \end{array} \quad . \tag{7}$$