Broj bodova____________

Ime i prezime________________________
Broj dosijea_________________________
Datum______________________________
Sala_______________________________

1. **(4 poena)** Popunite sledeću tabelu:

Godina (x)	l_x	d_x	p_x	q_x
0	2990	1430	0,52	0,48
1	1560	810	0,48	0,52
2	750	420	0,44	0,56
3	330	200	0,39	0,61
4	130	90	0,31	0,69
5	40			

2. **(6 poena)** Neka je $l_x = 40000 \cdot \frac{t^2 - x - 2}{t^2 + x}$ i l_{20}=20 000. Odrediti verovatnoću da lice staro 30 doživi 40 godina starosti.

Rešenje:

20000= 40000 $\frac{t^2-22}{t^2+20}$, sledi da je $t = 8$
${}_{10}p_{30}$=0,6213

3. **(3 poena)** Ukoliko je D_{30}=26.605, N_{32}=427.979, S_{30}=7.120.278 i S_{31}=6.640.326, odrediti komutativni broj D_{31}.

Rešenje:

$D_{31}=N_{31}-N_{32}$
$N_{31}=N_{30}-D_{30}$
$N_{30}=S_{30}-S_{31}$

N_{30}=7120278-6640326=479952
N_{31}=479952-26605=453347
D_{31}=453347-427.979=25.368

4. **(6 poena)** Data je sledeća funkcija $s(x) = (1 - x/100)^2, 0 < x \le \varpi$.

a) Za koja godišta data funkcija može predstavljati funkciju doživljenja.

Rešenje:

Iz $s(w)$=1 sledi w=100

b) U kojoj tački funkcija gustine $f(x)$ dostiže maksimum?

Rešenje:

Naći prvi izvod funkcije $f(x)$. Funkcija nema maksimum

c) Odrediti verovatnoću da lice staro 20 godina umre u intervalu između 55 i 85 godina starosti.

Rešenje:

$P(55<X\leq 85|X>20) = \frac{s(55)-s(85)}{s(20)} = 0{,}28125$

5. **(6 poena)** Izračunajte koeficijent asimetrije za Gama raspodelu koja ima koeficijent varijacije 1, ako je poznato da je funkcija gustine $f(x)=\frac{(x/\theta)^{\alpha}e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)}$ i $E(X^k)=\frac{\theta^k\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$.

Rešenje:

$$E(X)=\frac{\theta\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\theta\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=\theta\alpha$$
$$E(X^2)=\frac{\theta^2\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}=\theta^2\alpha(\alpha+1)$$
$$E(X^3)=\frac{\theta^3\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha)}=\theta^3\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$$

Iz $\sigma^2=E(X^2)-(EX)^2=\theta^2\alpha(\alpha+1)-(\theta\alpha)^2=\alpha\theta^2$ i $CV=\frac{\theta\sqrt{\alpha}}{\theta\alpha}=1$ sledi $\alpha=1$.

$E(X-EX)^3=E(X^3)-3E(X^2)E(X)+3E(X)(EX)^2-(EX)^3=2\theta^3$

Koeficijent asimetrije iznosi 2.

6. **(6 poena)** Pretpostavimo da broj zahteva X u toku jedne godine sledi Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda=1{,}4$. Izvesti obrazac za izračunavanje očekivane vrednosti ove raspodele (zakon raspodele je $P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x=0,1,2,\ldots$).

Rešenje:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!}=e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^{y+1}}{y!}=e^{-\lambda}\lambda\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}=e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}=\lambda$$
$E(X)=1.4$

7. **(3 poena)** Izračunati funkciju raspodele, funkciju gustine i intenzitet smrtnosti za model:

$$s(x)=\begin{cases}1-0{,}01x, & 0\leq x<50\\ 1{,}5-0{,}02x, & 50\leq x<75\end{cases}$$

Rešenje:

$$F(x)=\begin{cases}0{,}01x, & 0\leq x<50\\ 0{,}02x-0{,}5, & 50\leq x<75\end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01, & 0 \le x < 50 \\ 0{,}02, & 50 \le x < 75 \end{cases}$$

$$\mu_x = \begin{cases} \dfrac{1}{100 - x}, & 0 \le x < 50 \\ \dfrac{1}{75 - x}, & 50 \le x < 75 \end{cases}$$

8. **(4 poena)** Iznosi šteta slede Weibull-ovu raspodelu sa parametrima α i θ (funkcija raspodele je $F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^\alpha}$). Ako je 25. percentil 1000 a 75. percentil 100000 izračunajte α.

Rešenje:

$0{,}25 = 1 - e^{-\left(\frac{1000}{\theta}\right)^\alpha}$ sledi $-\left(\frac{1000}{\theta}\right)^\alpha = \ln{(0{,}75)}$

$0{,}75 = 1 - e^{-\left(\frac{100000}{\theta}\right)^\alpha}$ sledi $-\left(\frac{100000}{\theta}\right)^\alpha = \ln{(0{,}25)}$

Deljenjem ove dve jednakosti, dobijamo: $\frac{\ln{(0{,}25)}}{\ln{(0{,}75)}} = 100^\alpha$, pa je α=0,3415.

9. **(4 poena)** Date su sledeće verovatnoće: ${}_{10}p_{30} = 0{,}8$, ${}_{10}p_{40} = 0{,}7$ i ${}_{5}p_{50} = 0{,}5$. Odrediti verovatnoću da 30-godišnjak umre između 50 i 55 godina starosti.

Rešenje:

$${}_{10}p_{30} = \frac{l_{40}}{l_{30}} = 0{,}8$$

$${}_{10}p_{40} = \frac{l_{50}}{l_{40}} = 0{,}7$$

$${}_{5}p_{50} = \frac{l_{55}}{l_{50}} = 0{,}5$$

$${}_{20|5}q_{30} = \frac{l_{50} - l_{55}}{l_{30}} = \frac{l_{50}}{l_{30}} - \frac{l_{55}}{l_{30}} = {}_{20}p_{30} - {}_{25}p_{30}$$

$${}_{10}p_{30} \cdot {}_{10}p_{40} = \frac{l_{40}}{l_{30}} \cdot \frac{l_{50}}{l_{40}} = \frac{l_{50}}{l_{30}} = 0{,}8 * 0{,}7 = 0{,}56$$

$${}_{10}p_{30} \cdot {}_{10}p_{40} \cdot {}_{5}p_{50} = \frac{l_{40}}{l_{30}} \cdot \frac{l_{50}}{l_{40}} \cdot \frac{l_{55}}{l_{50}} = \frac{l_{55}}{l_{30}} = 0{,}8 * 0{,}7 * 0{,}5 = 0{,}28$$

$${}_{20|5}q_{30} = 0{,}56 - 0{,}28 = 0{,}28$$

10. **(4 poena)** Lice staro *x* godina osiguralo je kapital od *K* dinara da mu se isplati ako doživi *n*-tu godinu od dana osiguranja, a ako umre pre da osiguranih *K* dinara dobiju naslednici. Izvesti obrazac za neto mizu za ovu vrstu osiguranja.

Rešenje: Knjiga Aktuarska matematika, str. 121-123.

11. **(3 poena)** Lice staro 40 godina osiguralo je 300.000 dinara da se isplati naslednicima na kraju godine u kojoj osigurano lice umre, ukoliko ga smrt zadesi po isteku prvih 15 godina od dana osiguranja. Odrediti jednokratnu neto premiju za ovu vrstu osiguranja. Dati su sledeći komutativni brojevi: D_{55}=7.340, N_{40}=263.643, N_{41}=247.261, M_{40}=6.242 i M_{55}=3.958.

Rešenje:

$x = 40, K = 300000, k = 15$

${}_{15|}A_{40} = \frac{M_{55}}{D_{40}}$

$D_{40} = N_{40} - N_{41} = 16382$

${}_{15|}A_{40} = 0{,}241606$

$M = 72481{,}8$

12. **(2 poena)** Objasnite šta predstavlja sledeći izraz:

$$\dot{a}_x^{\left(\frac{1}{m}\right)} = a_x - \frac{m+1}{2m}$$

Rešenje: Neto miza (jednokratna neto premija) za doživotnu ličnu rentu od 1/m novčanih jedinica (ili m-tog dela od 1 novčane jedinice) koja bi se plaćala krajem svakog m-tog dela godine od dana osiguranja, za lice pristupne starosti *x* godina.

13. **(4 poena)** Izvedite obrazac za izračunavanje neto mize za osiguranje rente koja raste iz godine u godinu za stalan procenat od rente koja se plaća u prvoj godini, pri čemu se renta prima doživotno.

Rešenje: Knjiga Aktuarska matematika, str. 90-92.

14. **(3 poena)** Lice starosti 40 godina osiguralo je godišnju neposrednu privremenu anticipativnu ličnu rentu koja će iznositi 100 evra u prvoj godini, 200 evra u drugoj godini, 300 evra u trećoj godini i 400 evra u četvrtoj godini od dana osiguranja. Date su sledeće verovatnoće: $q_{40} = 0{,}2$; $q_{41} = 0{,}3$; $q_{42} = 0{,}35$. Obračunska kamatna stopa je 5%. Odrediti jednokratnu neto premiju za ovo osiguranje.

Rešenje:

$100 + \frac{200}{1{,}05} \cdot\ p_{40} + \frac{300}{1{,}05^2} \cdot\ {}_2p_{40} + \frac{400}{1{,}05^3} \cdot\ {}_3p_{40} = 472{,}48$

$p_{40} = 1 - q_{40} = 0{,}8$

${}_2p_{40} = 0{,}8 * 0{,}7 = 0{,}56$

${}_3p_{40} = 0{,}56 * 0{,}35 = 0{,}196$

15. **(2 poena)** Poređajte redosledom od najmanjeg do najvećeg sledeće brojeve:

l_{30} l_{31} D_{31} C_{30} N_{30} N_{31}

Rešenje:

$C_{30} < D_{31} < l_{31} < l_{30} < N_{31} < N_{30}$