

Zadatak 1

U SAD je sprovedeno istraživanje tržišta softvera za personalne računare. Ustanovljeno je da 50% korisnika koristi OS X kompanije Apple, 45% ispitanika koristi Windows kompanije Microsoft, dok Linux koristi 5% ispitanika. Takođe, ispitana je odanost brendovima. Ustanovljeno je da će nakon godinu dana 80% korisnika Apple-ovih proizvoda ostati verni brendu, 15% će početi da koristi Windows, a 5% Linux. Sa druge strane, 20% Majkrosoftovih korisnika će preći na Apple, Majkrosoftu će ostati verno 75%, a na Linux će preći 5%. Sa Linuxa na Apple kao i na Windows će za godinu dana preći 40% korisnika, dok će Linuxu ostati verno 20% korisnika.

- Odrediti Markovljevu matricu prelaznih verovatnoća.
- Kakva će biti situacija na ovom tržištu nakon godinu dana?
- Kakva će biti situacija na ovom tržištu nakon dve godine?
- Kolika je verovatnoća da će korisnik preći sa Linuxa na Windows nakon dve godine?
- Odrediti ravnotežno stanje na ovom tržištu.

Zadatak 2

Čarobna zemlja Oz je blagoslovena sa mnogo stvari, ali ne i sa lepim vremenom. U toj zemlji nikada se ne dešava da bude lepo vreme dva dana uzastopno. Ukoliko je jedan dan lepo vreme, sledećeg dana postoji jednaka verovatnoća da će pasti sneg i kiša. Ukoliko je vreme bilo kišovito, postoji 50% šanse da će takvo vreme ostati i sutra, dok su šanse da će biti sneg ili lepo vreme jednake. Slična je situacija ako pada sneg - u 50% slučajeva će i sutradan biti isto vreme dok će kiša ili lepo vreme biti u jednakom broju slučajeva.

Na osnovu navedenih informacija i uz pretpostavku da se navedene verovatnoće ne menjaju sa prelaskom iz jednog vremenskog perioda u drugi, pomozite čarobnjacima iz zemlje Oz da predvide vreme u narednim situacijama:

- (5 poena) Ako danas pada sneg, koja je verovatnoća da trećeg dana neće padati sneg?
- (5 poena) Ako je prvog dana jednaka bila verovatnoća za sve tri vremenske prilike, koja je verovatnoća da će biti lepo vreme četvrtog dana.
- (10 poena) Odrediti ravnotežno stacionarno stanje na „tržištu“ vremenskih prilika u čarobnoj zemlji Oz.

Rešenje:

- (5 poena) Ako danas pada sneg, koja je verovatnoća da trećeg dana neće padati sneg.

$$p = 0,5625$$

- (5 poena) Ako je prvog dana jednaka bila verovatnoća za sve tri vremenske prilike, koja je verovatnoća da će biti lepo vreme četvrtog dana.

$$p = 0,198$$

- (10 poena) Odrediti ravnotežno stacionarno stanje na „tržištu“ vremenskih prilika u čarobnoj zemlji Oz.

$$(p_1, p_2, p_3) = (0.2, 0.4, 0.4)$$

Zadatak 3

Kompanija „Novogodišnje jelke“ poseduje zemljište na kojem je zasađeno 5000 novogodišnjih jelki. Svake godine kompanija treba da izabere i poseče određeni broj jelki radi dalje prodaje. Jedno od pravila kojim se rukovodi kompanija je da ne seče niske jelke, već da ih ostavi da izrastu kako bi ih prodali sledeće godine po višoj ceni. Takođe, može se desiti da je jelka dovoljno visoka za sečenje i prodaju u tekućoj godini, ali da to nije urađeno jer je dovoljan broj već bio posečen. Međutim, istovremeno postoji rizik da jelke zahvati određena bolest nakon koje neće biti upotrebljive za prodaju. U ovoj godini procenjeno je da od ukupnog broja jelki 1500 previše nisko za sečenje, dok ostatak može da se seče. U sledećoj tabeli date su verovatnoće prelaska (iz jedne godine u drugu), a koje se odnose na sledeća četiri stanja u kojima može biti jelka:

Trenutno/ buduće Stanje	Posečena i prodata	Izgubljena usled bolesti	Previše niska za sečenje	Za sečenje ali nije posečena i prodata
Posečena i prodata	1	0	0	0
Izgubljena usled bolesti	0	1	0	0
Previše niska za sečenje	0	0,1	0,8	0,1
Za sečenje ali nije posečena i prodata	0,08	0,02	0	0,9

- a) Odredi očekivani broj godina koje će proteći da jelka koja je trenutno za sečenje ali nije posečena i prodata bude posečena i prodata ili izgubljena usled bolesti.

Pitanje za razmišljanje: A kako bi glasio odgovor na pitanje – koliko iznosi očekivani broj godina koje će jelka trenutno niska za sečenje provesti na imanju pre nego bude posečena i prodata ili izgubljena usled bolesti?

- b) Odrediti procenat previše niskih jelki koje će uspeti da izbegnu bolesti i na kraju biti posečene i prodate.

Očekujemo da u proseku _____ jelki koje su na početku previše niske za sečenje na kraju budu posečene i prodate.

- c) Odrediti procenat jelki koje u ovoj godini jesu za sečenje a koje će na kraju biti izgubljene usled bolesti.

Procenat jelki koje su u ovoj godini za sečenje a koje će na kraju biti izgubljene usled bolesti iznosi _____%.

- d) Odrediti očekivani broj jelki od ukupnog broja novogodišnjih jelki za koje očekujemo da će biti izgubljene usled bolesti.

Očekivani broj jelki od ukupnog broja jelki na zemljištu za koje očekujemo da će biti izgubljene usled bolesti je _____.

- e) Prosečni trošak uzgoja jedne jelke iznosi 1000 dinara. Plan kompanije je da očekivani profit od celokupnog zasada na zemljištu iznosi 1.000.000 dinara. Koliko treba da iznosi cena jedne jelke u prodaji kako bi kompanija imala planirani profit?

Cena jedne jelke treba da iznosi _____ dinara.

Rešenje:

a) Odredi prosečno vreme koje će proteći da jelka koja je trenutno za sečenje ali nije posečena i prodana bude spremna za sečenje pre nego je poseku ili ne bude izgubljena usled bolesti.

Prosečno protekne **10** godina da jelka koja je spremna za sečenje provede u tom stanju pre nego što uđe u neko od finalnih stanja.

b) Odrediti procenat previše niskih jelki za sečenje koje će na kraju ipak biti posečene

Očekujemo da u proseku **40%** jelki koje su na početku previše niske za sečenje na kraju budu posečene i prodane.

c) Odrediti procenat jelki koje u ovoj godini jesu za sečenje a koje će na kraju biti izgubljene usled bolesti.

Procenat jelki koje su u ovoj godini za sečenje a koje će na kraju biti izgubljene usled bolesti iznosi **20%**.

d) Odrediti očekivan broj jelki od ukupnog broja novogodišnjih jelki za koje očekujemo da će biti izgubljene usled bolesti.

Očekivani broj jelki od ukupnog broja jelki na zemljištu za koje očekujemo da će biti izgubljene usled bolesti je **1600**.

e) Prosečni trošak uzgoja jedne jelke iznosi 1000 dinara. Plan kompanije je da profit od celokupnog zasada na zemljištu iznosi 1.000.000 dinara. Koliko treba da iznosi cena jedne jelke u prodaji kako bi kompanija imala planirani profit?

Cena jedne jelke treba da iznosi **1764,7** dinara.

Zadatak 4

Advokatska firma rangira svoje zaposlene u tri kategorije – junior, senior i partner. U toku svake godine, u proseku, 15% juniora će biti promovisano na seniorske pozicije dok će 5% napustiti firmu. Takođe, na godišnjem nivou, 20% advokata sa seniorskih pozicija budu unapređeni u partnere a 10% advokata seniora napusti firmu. Kada je reč o partnerima, u proseku 5% godišnje napusti firmu. U firmi nije moguće da nazadujete sa svojom pozicijom niti da preskačete poziciju pri napredovanju. Interesuje nas da li će firmu advokat napustiti kao partner ili pre nego što postane partner.

a) Koliko u proseku osoba koju advokatska firma primi kao juniora radi u ovoj kompaniji?

b) Kolika je šansa da će advokat junior posao napustiti sa pozicije partnera u firmi? (Koliko iznosi verovatnoća da će junior postati partner?)

c) Koje je prosečno vreme koje će osoba koja je trenutno partner da provede u firmi pre nego što je napusti?

Rešenje:

a) Koliko u proseku osoba koju advokatska firma primi kao juniora radi u ovoj kompaniji?

U proseku, advokat koga primimo kao juniora radi u firmi **17,5** godina.

b) Kolika je šansa da će advokat junior posao napustiti sa pozicije partnera u firmi?

Advokat junior napušta firmu kao partner u **50%** slučajeva.

c) Koje je prosečno vreme koje će osoba koja je trenutno partner da provede u firmi pre nego što je napusti?

Advokat, u proseku, provede na partnerskoj poziciji **20** godina pre nego što napusti firmu.

Zadatak 5

Na samom početku počinjemo sa 2\$. U svakom narednom periodu igramo identičnu igru u kojoj ulažemo jedan dolar i u kojoj je verovatnoća dobitka p . Ako pobedimo u igri dobijamo naš dolar nazad i još jedan dolar dobitka, u suprotnom gubimo uloženi dolar. Igru igramo dok ne ostanemo bez para ili ne budemo imali četiri dolara u posedu.

a) Predstavi problem i dinamiku igre koristeći Markovljevu matricu prelaska

b) Pretpostavimo da je verovatnoća dobitka 0,5. Izračunaj verovatnoću da na kraju igre imamo četiri dolara kod sebe, ako počinjemo sa pomenutih dva dolara.

Zadatak 6

Na početku svake sezone baštovan meri kvalitet zemlje na svojoj farmi, na kojoj će posaditi kulture. U zavisnosti od kvaliteta zemljišta zavisice mu i budući prinosi, samim tim i prihodi. Kvalitet zemljišta na osnovu analiza koje sprovodi upada u jednu od sledeće tri kategorije – (1) zemlja vrhunskog kvaliteta, (2) zemlja dobrog kvaliteta, (3) zemlja lošeg kvaliteta. Tokom godina baštovan je primetio da je kvalitet zemljišta uvek direktno vezan za prošlogodišnju sezonu i prinose koje je tada imao. Uticaj kvaliteta zemljišta u prošloj godini povezan je sa kvalitetom zemljišta u ovoj godini matricom prelaska P

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Baštovan je takođe primetio da može da utiče na verovatnoće iz matrice prelaska P . Ćubrenjem zemljišta matrica prelaska između prošle i ove godine izgleda ovako:

$$P_f = \begin{matrix} (1) & \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,55 \end{pmatrix} \\ (2) & \\ (3) & \end{matrix}$$

Baštovan razmatra sada svoju dugoročnu strategiju i želi da vidi da li mu se više isplati da đubri zemljište ili ne. Procenio je da će godišnji prinos iznositi 250€ po aru zemljišta ako ne đubri, dok će mu prinos ako đubri biti 420€ po aru. Đubrivo već duže vremena ima stabilnu cenu na tržištu i iznosi 50€ po pakovanju. Potrebno mu je dva pakovanja đubriva po aru zemljišta ako je zemljište bilo vrhunskog kvaliteta. Ako je zemljište bilo dobrog kvaliteta potrebno mu je 25% više đubriva po aru, a ako je bilo lošeg kvaliteta on po aru mora da stavi 60% više đubriva nego kada je zemlja vrhunskog kvaliteta.

Da li baštovan treba da koristi đubrivo i kolika će biti razlika ako koristi ili ne koristi đubrivo.

Rešenje:

Ako baštovan koristi đubrivo generisaće profit koji će biti veći za **34,5€** po aru zemljišta.